

# 'Design As Research' (DARe): Probleemoplossen in de meetkunde met behulp van scaffolding

Paul Durenkamp MSc, Fontys Hogescholen Tilburg

Samenvatting

*Dit artikel heeft de vorm van een verhaal, een 'narratief'. In het lectoraat BètaDidactiek van Fontys Hogescholen wordt het schrijven van een narratieve beschouwd als een kansrijke manier om onderzoek op een betekenisvolle wijze met andere onderwijsprofessionals te delen. Het artikel betreft een onderzoek naar de probleemoplossende vaardigheden van bovenbouwleerlingen bij het onderwerp 'meetkunde' met bijzondere aandacht voor 'scaffolding'. Scaffolding houdt in "the proces that enables a child or novice to solve a problem, carry out a task, or achieve a goal which would be beyond his unassisted efforts" (Wood, Bruner, & Ross, 1976, p.90). Het onderzoek is uitgevoerd volgens de methodiek 'design as research' (DARe). Dit is een onderzoeksmethodiek die kan worden omschreven als 'the systematic study of designing, developing and evaluating educational interventions, - such as programs, teaching-learning strategies and materials, product and systems – as solution to such problems, which also aims at advancing our knowledge about characteristics of these interventions and processes to design and develop them.'" (Plomp, 2010, p.9) Binnen dit onderzoek is een online omgeving ontwikkeld voor bovenbouwleerlingen om middels scaffolding een meetkundig probleem op te kunnen lossen en zodoende hun probleemoplossende vaardigheden op dit vlak te verbeteren. Voor extra onderbouwing en onderliggende stukken verwijs ik naar het bijbehorende portfolio.*

## Aanleiding: De leerling als probleemoplosser?

Elk jaar zitten zowel mijn leerlingen als ik met samengeknepen billen wanneer het meetkunde onderwerp voor de deur staat. Meetkunde is een vast examenonderdeel binnen het wiskunde-B-curriculum en wordt door leerling doorgaans als lastig ervaren. Leerlingen zijn namelijk gewend om bij wiskundige problemen een formule of vergelijking aangereikt te krijgen, maar bij meetkundige problemen moet de aanpak zelf worden bepaald. Leerlingen grijpen daarom bij het maken van het huiswerk eenvoudig naar het uitwerkingenboek als ze vastlopen, omdat ze graag willen weten wat het antwoord is of snel het huiswerk willen afhebben. Het oplossingsproces lijkt van ondergeschikt belang. De docent wordt dan ook vaak overgeslagen, omdat ze niet 'durven' te vragen of omdat het opzoeken van het antwoord nu eenmaal eenvoudiger is. Ook is de hulp van een docent niet altijd voorhanden, bijvoorbeeld thuis, maar ook op leerpleintjes waar leerlingen steeds vaker werken. Bepaalde leerlingen willen graag op een leerpleintjes aan de slag, omdat ze dan beter kunnen werken, vinden ze. Ook heb je in elke klas leerlingen zitten die in de les weinig uitvoeren, maar thuis des te harder werken. Als docent merk je dat de leeromgeving van leerlingen aan het veranderen is. Dit wordt ook gevoeld door de digitale ontwikkelingen waardoor er op elke plek gewerkt kan worden. Dit betekent ook dat de docent niet altijd de hulp kan bieden die de leerling kan gebruiken om probleemoplossende vaardigheden te verbeteren. Wanneer een leerling een vraag heeft over een opgave, ga je als docent na of de voorkennis wel paraat is, stel je verhelderende vragen om de 'echte' vraag duidelijk te krijgen en waardoor de leerling het daadwerkelijke probleem scherper voor de geest krijgt. Als dat is gedaan ga je vaak middels het geven van een sturende vraag of hint de leerling aanzetten om zelf verder te denken. Dit is voor een leerling ontzettend lastig, dan wel onmogelijk, om zelfstandig te doen en ook het uitwerkingenboek helpt daar niet bij, integendeel. Soms bied ik de leerlingen wiskundige raadsels aan tegen het einde van de les, om te stimuleren de probleemoplossende vaardigheden te verbeteren. Een deel gaat de uitdaging niet eens aan, maar ook de puzzelaars hebben vaak moeite met dergelijke raadsels, terwijl het zelden boven hun niveau is. De resultaten vallen om deze redenen doorgaans tegen bij meetkunde.

In gesprekken geven leerlingen aan dat ze de huiswerkopgaven als het ware uit hun hoofd leren en proberen te kopiëren op nieuwe problemen, bijvoorbeeld op een toets of examen. Deze leerlingen lopen vast als het probleem er anders uitziet of ze het niet herkennen. Een collega geeft hierbij aan: "Als de vraag anders gesteld wordt hebben leerlingen al meteen het idee dat het een héél ander soort vraag is." Daarnaast zijn de uitwerkingen en andere hulpmiddelen niet meer voorhanden en staan ze er nu alleen voor. Dit wordt ook

geregeld gekoppeld aan een 'black-out', maar mijns inziens hebben ze niet geleerd om zelf een oplossingsstrategie te bepalen en dergelijke problemen op te lossen. Een collega onderstreept dit: *"Als docent ben ik bij dit soort vragen vooral bezig met het wegnemen van paniekgevoelens bij leerlingen."* Binnen dit onderzoek wil ik daarom graag een instrument ontwikkelen dat de leerlingen zou helpen bij dit onderwerp, zodat de leerlingen betere probleemoplossers worden en uiteindelijk een beter resultaat halen op dit onderwerp.

Vanuit meerdere oogpunten is het relevant om deze vraag te onderzoeken: Het draagt eraan bij dat leerlingen beter zijn toegerust om (wiskundige) problemen op te lossen, bijvoorbeeld op het centraal eindexamen, maar ook bij andere vakken en situaties waar een probleem moet worden opgelost. Drijvers (2015) zegt hierover: *"Het interessante is dat wiskunde een vakgebied is waarin je aan probleemoplossen uitstekend aandacht kunt besteden, terwijl het ook buiten de wiskunde van grote waarde is."* (p.4) Daarnaast helpt het mij en mijn collega's om meer inzicht te krijgen in deze situatie, met name bij wiskunde-B waar het probleem het meest duidelijk lijkt te zijn, aangezien er regelmatig slechte resultaten worden behaald bij dit onderwerp op zowel havo als vwo.

De verlegenheidssituatie is gestoeld op drie aanleidingen:

1. Meetkundige problemen zijn **complex** en **minder algoritmisch** van aard in de bovenbouw, waardoor een belangrijk beroep wordt gedaan op de **probleemoplossende vaardigheden** van leerlingen. Drijvers et al. (2013) plaatsen het deelgebied 'meetkunde' bovenaan in de rangorde wat betreft de mate waarin de wiskundige denkactiviteit *'analytisch denken en probleemoplossen'* aan de orde komt in het voortgezet onderwijs.
2. De leerling **neemt niet de tijd** om een probleem echt op te lossen. Leerlingen lijken liever hun huiswerk af te willen hebben, dan deze tijd te steken in het echt willen begrijpen van één opgave. Van Streun (1989) verwoordt het als volgt: *"Leerlingen zijn in de schoolse situatie veelal tevreden met succes op korte termijn en met beperkte oplossingsmethoden voor beperkte klassen van problemen."* Een collega verwoordt het op een vergelijkbare manier: *"De leerling ervaart het niet als een (écht) probleem en doet dus niet veel om het op te lossen."* Ook grijpen leerlingen snel naar uitwerkingen als ze niet uit een opgave komen. Bij het lezen van de uitwerking krijgen ze (onterecht) het idee dat ze het begrijpen, terwijl de crux bij meetkundige problemen vaak zit in het zelf bepalen van een oplossingsstrategie.
3. De **leerplek** van leerlingen is aan het **veranderen**. Leerlingen dienen steeds meer verantwoordelijkheid te nemen voor hun eigen leerproces, wat ook betekent dat ze niet altijd leren op het moment dat er een docent aanwezig is, bijvoorbeeld thuis of op een leerpleintje. Het idee is dan vaak dat leerlingen gemotiveerder en meer betrokken zijn wanneer ze zelf enige controle kunnen uitoefenen op hun leerproces (Burg, 2009). Dit wordt ondersteund door Ryan & Deci (2000) die stellen dat een gevoel van autonomie de intrinsieke motivatie van leerlingen van bevorderen. Echter is door deze manier van werken de ondersteuning van een (wiskunde)docent niet altijd voorhanden.

Op basis van deze aanleiding is de volgende ontwerp vraag gedefinieerd: *Hoe kunnen mijn wiskunde-B-leerlingen probleemoplossende vaardigheden aanleren t.b.v. het oplossen van een meetkundig probleem?*

### Het bepalen van de ontwerpeisen en randvoorwaarden

Nu een beeld is verkregen van de aanleiding is het zaak om ontwerpeisen op te stellen waaraan het instrument dient te voldoen. Om deze vast te kunnen stellen is vanuit drie perspectieven data verzameld die vertaald zijn naar ontwerpeisen en als uitgangspunten dienen voor het ontwerpen van leerinstrumenten. Er is gebruik gemaakt van wetenschappelijke literatuur, de hard-op-denk-methode (om samen met leerlingen een meetkundeopdracht op te lossen en erachter te komen waar de problemen liggen) en wiskunde collega's is de vraag voorgelegd hoe zij kijken naar de probleemoplossende vaardigheden van hun leerlingen.

Allereerst dienen we een onderscheid te maken tussen 'beginners' en 'experts'. Chi et al. (1979) hebben onderzocht dat er een wezenlijk verschil bestaat tussen hoe een beginner en een expert een probleem probeert op te lossen. Dit verschil is niet alleen *kwantitatief* (dat experts over meer kennis beschikken), maar ook *kwalitatief* (de kennis van experts is anders geordend). Beginners kijken naar de kenmerken van de

probleemomschrijving en categoriseren deze, terwijl experts juist gelijk kijken naar onderliggende concepten. Hierdoor richt een beginner zich op oppervlakkige kenmerken en maakt minder snel de koppeling die de expert wel maakt, namelijk die van een passende oplossingsrichting. Bij het oplossen van meetkundige problemen met behulp van de hard-op-denk-methode met leerlingen kwam naar voren dat ze de benodigde meetkundige voorkennis niet altijd paraat hebben, waardoor het probleem niet of verkeerd wordt begrepen (kwantitatief verschil t.o.v. expert). Voorbeelden hiervan zijn dat het begrip 'gestrekte hoek' wordt verward met 'stompe hoek' of dat meetkundig gereedschap verkeerd wordt toegepast zoals 'SOS CAS TOA' toepassen op een niet-rechthoekige driehoek. Er wordt daarnaast vooraf niet of nauwelijks concreet een probleemaanpak gekozen. Het lijkt erop alsof leerlingen de 'weg' kiezen die ze herkennen, zoals Chi et al. (1979) ook aangeven (kwalitatief verschil t.o.v. expert). Op welke manier kan je een leerling ('beginner') dan toch helpen om verder te komen richting de kennis en aanpak van een 'expert'?

De bekende Russische psycholoog Vygotsky (1978) stelt dat je leerlingen ondersteuning moet aanbieden in de 'zone van naaste ontwikkeling'. Dit is het gebied tussen was leerlingen al zelfstandig kunnen en het niveau waarbij ze ondersteuning nodig hebben. Deze ondersteuning wordt ook wel *scaffolding* genoemd (vertaald: in de steigers zetten, oftewel 'ondersteunen'). Anderson (1989) en Henningsen en Stein (1997) benadrukken dat het van belang is bij scaffolding om leerlingen op eigen kracht een probleem op te laten lossen. De docent of medeleerling speelt hierin een assisterende rol. Van groot belang is het dat deze hulp niet de complexiteit of de cognitieve uitdaging van het probleem doet afnemen. Van de Pol et al. (2010) gaan verder en stellen drie voorwaarden waaraan scaffolding dient te voldoen: De ondersteuning vermindert geleidelijk, er is een duidelijke transfer van verantwoordelijkheid richting de leerling en zonder de ondersteuning had de leerling het (nog) niet gekund. Hieruit valt ook op te maken dat de docent een belangrijke rol speelt, terwijl de docent niet aanwezig is bij op een leerpleintje of thuis, waardoor deze ondersteuning dus niet altijd aanwezig is. De behoefte aan ondersteuning van een docent bleek ook duidelijk uit de hard-op-denk-methode, waarbij leerlingen echt de ondersteuning nodig hadden om het probleem op te kunnen lossen. Zonder de hints, sturende of verhelderende vragen van de docent waren de leerlingen er niet zelfstandig uitgekomen. De vraag is nu: hoe kunnen de leerlingen op den duur zelfstandig een wiskundig probleem oplossen en zodoende meer een 'expert' worden en hoe kan de docent daarbij ondersteunen?

Drijvers (2015) geeft aan dat het bij wiskunde gaat om het oplossen van problemen, die voor de leerling niet standaard zijn. Om deze reden dient de leerling probleemoplossende vaardigheden te ontwikkelen, wat inhoudt: een probleemaanpak bedenken, meerstappenstrategie uitvoeren of weten hoe je (nieuwe) kennis in een nieuwe situatie creatief kunt inzetten. Ook gaat het om het ontwikkelen van manieren om aan een nieuw probleem te beginnen. Drijvers et al. (2013) beschrijven dat een succesrijke aanpak van een meetkundig probleem is toe te schrijven aan twee zaken: 1. Een *systematische probleemaanpak*, bestaande uit een *situatieanalyse* (vooruitdenken: wat is er gegeven? Wat volgt er direct uit?) en een *doelanalyse* (terugdenken: Waar moeten we naartoe? Welke kloof is er tussen gegeven en doel?). 2. Het adequaat oproepen van *relevante wiskundige kennis* uit het relatienetwerk: *Gereedschap* (met welke kennis kun je die kloof overbruggen? Ken je een verwant opgelost probleem? Of een vereenvoudiging?). Dit wordt ook breed ondersteund door collega's; ze geven aan dat leerlingen grote moeite hebben met het verkrijgen van overzicht, graag een stappenplan willen hebben en hopen of denken dat er één manier is om alle problemen op te lossen. Ook het gebrek aan vaardigheden wordt onderschreven: "Ik vraag me af of we in de onderbouw de 'Algemene vaardigheden'-pagina's niet tóch moeten behandelen om WDA's (wiskundige denkactiviteiten) beter aan te kunnen." Waarbij Drijvers et al. (2013) ingaan op wiskundige problemen, heeft het echtpaar Van Hiele-Geldof zich in 1957 al specifiek gericht op *meetkundige* problemen. De zogeheten Van Hieleniveaus onderscheiden vijf denkniveaus met betrekking tot de ontwikkeling van begrip van meetkunde onder leerlingen (De Villiers, 2010):

- **Niveau 1 – Visualisatie:** Leerlingen herkennen figuren op visuele en globale manier, maar identificeren niet expliciet de eigenschappen van deze figuren.
- **Niveau 2 – Analyse:** Leerlingen beginnen de eigenschappen van figuren te zien en leren de bijbehorende technische begrippen om deze figuren te beschrijven. Echter leggen ze nog geen verbanden tussen figuren of eigenschappen van figuren.
- **Niveau 3 – Ordening:** Leerlingen kunnen op een logische manier de eigenschappen ordenen middels een beperkt aantal deductieve stappen en ze begrijpen de onderlinge relaties tussen figuren.

- **Niveau 4 – Informele deductie:** Leerlingen kunnen meerdere deductieve stappen zetten m.b.v. definities en beginnen het belang van deductie te begrijpen, de rol van axioma's, stellingen en bewijzen.
- **Niveau 5 – Formele deductie:** Bewijzen en analyseren van stellingen in verschillende postulaatsystemen.

Als we bovenbouwleerlingen in ogenschouw nemen dienen we naar niveau twee, drie en vier te kijken. Niveau één is namelijk dusdanig basaal dat ze dit al op de basisschool en in de onderbouw hebben geleerd. Niveau vijf is niet aan de orde op de middelbare school en maakt ook geen deel uit van het examenprogramma. De niveaus hebben volgens Usiskin (1982) vier belangrijke karakteristieken:

- **Vaste volgorde** – Een leerling dient door een voorgaand niveau te gaan om bij een volgend niveau te komen. Een leerling kan dus niet een niveau overslaan of het in een andere volgorde doorlopen.
- **Nabijheid** – Hetgeen intrinsiek was in het vorige denkniveau wordt extrinsiek in het huidige denkniveau.
- **Onderscheid** – Elk niveau heeft zijn eigen linguïstische symbolen en eigen netwerk van relaties om deze symbolen met elkaar in verband te brengen.
- **Scheiding** – Twee personen die op een verschillend niveau redeneren kunnen elkaar niet begrijpen.

De Villiers (2010) legt de relatie tussen de Van Hielenniveaus en scaffolding: *"A very important aspect of the Van Hiele theory is that it emphasizes that informal activities at Levels 1 and 2 should provide appropriate "conceptual substructures" for the formal activities at the next level. Though different, this idea is somewhat similar to the idea of instructional scaffolding promoted by Wood, Bruner & Ross (1976)." (p.11)* Wood et al. beschrijven scaffolding als volgt: *"the process that enables a child or novice to solve a problem, carry out a task, or achieve a goal which would be beyond his unassisted efforts"* (Wood, Bruner, & Ross, 1976, p.90). Er wordt dus gesteld dat er als het ware een overeenkomst is tussen scaffolding en de niveaus van Van Hiele wat betreft de volgorde en hetgeen de leerling wordt aangeboden om bij een volgend niveau te komen. Bij meetkunde dient de leerling de geschikte 'conceptuele substructuren' te worden aangeboden om de meer formele activiteiten in de volgende niveaus aan te kunnen.

Met behulp van een format van Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) heb ik vanuit de drie perspectieven (literatuur, leerling en docent) een drietal ontwerpeisen en één randvoorwaarde opgesteld. De ontwerpeisen zijn de functionele kenmerken waarmee de ontwerper ideeën in ontwerpkenmerken kan omzetten (Science Direct, 2020). Als eraan voldaan is, is het product geslaagd. De ontwerpeisen zijn:

1. Het te ontwerpen instrument moet de leerlingen ondersteunen in het verkrijgen van **overzicht en structuur** en wat de plek van hun (parate) voorkennis hierin is (gekoppeld aan aanleiding 1).
2. Leerlingen moeten op een **toegankelijke manier** zich kunnen ontwikkelen o.h.g.v. probleemoplossen binnen de meetkunde. Met een toegankelijk manier wordt bedoeld dat de leerling eenvoudig toegang heeft tot het instrument of de methode en dit (voor het gevoel van de leerling) niet te veel tijd kost om toe te passen (gekoppeld aan aanleiding 2).
3. Het te ontwerpen instrument moet **plaatsonafhankelijk** zijn. M.a.w. leerlingen moeten het zowel, in de klas, buiten de klas of thuis kunnen gebruiken, gezien de leeromgeving van de leerlingen aan het veranderen is (gekoppeld aan aanleiding 3).

De randvoorwaarde is: Het te ontwerpen instrument of methode moet te **integreren** zijn in de bestaande methode (Getal & Ruimte), binnen de lessen die hiervoor staan in de jaarplanning en binnen het Programma Toetsing en Afronding. Randvoorwaarden zijn de eisen waaraan moet worden voldaan om een specifiek proces plaats te kunnen laten vinden (Ensie, 2020).

Aan de hand van deze ontwerpeisen is een *morfologische kaart* opgesteld. Dit is een ontwerpmethodologie ontwikkeld door Fritz Zwicky (1966) die als doel heeft het onderzoeken van alle mogelijke oplossingen van een complex probleem. In mijn morfologische kaart zijn dus de ideeën geplaatst voor het ontwerpen van een instrument dat leerlingen mogelijk gaat helpen om hun probleemoplossende vaardigheden te verbeteren. Hieruit kwam uiteindelijk het volgende ontwerp:

### Het eerste ontwerp: Probleemoplossen met Augmented Reality (AR)

Vanuit de morfologische kaart is het idee ontstaan om te gaan werken met 'augmented reality'. Het houdt in dat de leerling m.b.v. zijn of haar camera en een app op de telefoon een opgave in het boek kan scannen, zoals een QR-code wordt gescand. De app herkent vervolgens de opgave en er verschijnt een 'aanvullende werkelijkheid', in dit geval een tip, hint of hulplijn. Bij de theorieblokken in het lesboek wordt dit ook toegepast in de vorm van een extra uitleg of een koppeling met andere theorieën. Hierbij wordt vervolgens nog onderscheid gemaakt tussen drie kleuren (tekst): *Groen* betekent dat het *voorkennis* betreft, *blauw* betreft een hint van *algemeen* karakter (deze hint zou je dus ook kunnen toepassen bij andere opgaven) en *rood* betekent een *specifieke* hint voor de betreffende opgave. Voor elke huiswerkopgave en theorieblok binnen het hoofdstuk over meetkunde is een dergelijke 'aanvullende werkelijkheid' gecreëerd binnen de app HP Reveal. Dit resulteerde in 42 opgaven en theorieblokken. Dit ontwerp voldoet om de volgende redenen aan de ontwerpeisen en de randvoorwaarde: Een leerling kan wanneer hij of zij vastloopt bij een opgave de mobiele telefoon pakken, de opgave scannen en zodoende een hint krijgen. Het idee hierachter is dat de leerling op deze wijze op een toegankelijke manier wordt gestimuleerd om verder te zoeken naar een oplossingsstrategie, wat aansluit bij ontwerpeis 2 (toegankelijkheid). Door het ook toe te passen op de theorieblokken, gebruik te maken van drie kleuren en doordat de leerling meer zelf gaat proberen is de verwachting dat leerlingen een beter overzicht krijgt over de stof en structuur gaan ontwikkelen in het opzetten van een oplossingsstrategie (ontwerpeis 1; overzicht en structuur). Middels het gebruik van deze ICT-tool kan de leerling zelf verder ontdekken, ook als de docent niet in de buurt is, bijvoorbeeld thuis op een leerpleintje (ontwerpeis 3; plaatsonafhankelijkheid). In feite komt dit ontwerp neer op een digitale manier van *scaffolding*.

Dit instrument is vervolgens toegepast bij mijn *5havo-wiskunde-B-klas*, gezien deze klas op het punt stond met het meetkunde-onderwerp te beginnen en ook doorgaans bij dit hoofdstuk tegenvallende resultaten worden behaald op dit onderdeel. Na een inleidende les over de werking en het belang van de app gingen de leerlingen vervolgens in circa 20 lessen hiermee aan de slag.

### Positief ontvangen, maar gebrek aan differentiatie

Aan het einde van de lessenserie is er een vragenlijst afgenomen en is de stof in een schoolexamen getoetst. Leerlingen waren positief over de app. Ze vonden de app handig in gebruik, toegankelijk, en vernieuwend. Ze vonden de hints helder en duidelijk beschreven en gaven aan dat ze door de hints minder snel geneigd waren om naar het uitwerkingenboek te grijpen. Leerlingen vonden het met name fijn als de hints ook werden gevisualiseerd, zoals het geven van een hulplijn in het gegeven figuur. Het gebruik van de app was verschillend bij leerlingen: Een groep leerlingen gebruikten de app zodra ze vastliepen bij een opgave. Je zag ze de opgave scannen en de hint lezen. Als ze de hints begrepen werkten ze door en anders kwamen ze alsnog naar de docent toe. Een andere groep leerlingen leek de app *schijnbaar* niet te gebruiken, maar bij navraag bleken ze het met name thuis in te zetten als er geen ondersteuning was van docent of medeleerlingen. Er was ook een leerling die alle afbeeldingen uit de app had opgeslagen op haar telefoon en zodoende de app zelf niet meer nodig had. In sommige gevallen gebruikte ik, als docent, ook zelf de app als een leerling naar mij toekwam met een vraag. Ik opende dan de app om samen met de leerling de opgave te bekijken en op te lossen. Een kleine groep gebruikte de app niet, omdat ze van mening waren het niet nodig te hebben of niet paste binnen hun manier van leren.

Naast een aantal technische verbeteringen, kwam één belangrijk verbeterpunt uit de vragenlijsten en dat was de vraag om meer *differentiatie*. De ene leerling vond de hints namelijk te veel van de kern weggeven en de ander juist te weinig. Het zou de leerlingen helpen om zelf te kunnen bepalen hoeveel hints ze krijgen en in hoeverre deze hints je op weg helpen. De Amerikaanse onderwijskundige Tomlinson, bekend om haar onderzoek naar differentiëren, definieert *differentiëren* als een onderwijsbenadering waarbij docenten proactief aanpassingen doen aan de inhoud van onderwijs, leeractiviteiten, leer materiaal en de input van leerlingen om tegemoet te komen aan de verschillende leerbehoeften van leerlingen, om daarmee de leermogelijkheden van *alle* leerlingen in de klas te vergroten (Denessen, 2017). Kerpel (2014) definieert het bondiger: Differentiatie is de wijze waarop de docent rekening houdt met de verschillen tussen leerlingen. Er zijn tal van mogelijkheden om te differentiëren, op basis van instructie, leerstof, tempo, doel, zorg, toetsing en beoordeling (Kerpel, 2014). Van der Vegt et al. (2009) stellen dat *scaffolding* en de *inzet van ICT* effectieve praktische manieren zijn om te differentiëren. Ze merken hierbij op dat het van belang is dat bij *scaffolding* de 'steigers' ook weer geleidelijk afgebouwd moeten worden, conform Anderson (1989), Henningsen en Stein (1997) en Van de Pol et al. (2010). Bij de inzet van ICT is het van belang dat dit gebeurt in combinatie met

sturing en gerichte feedback door de docent. Daarnaast is afwisseling tussen 'papier' en ICT van belang (Van der Vegt et al, 2009). In dit kader is de vraag van de leerlingen om meer te differentiëren binnen de app dus een terechte vraag. Op basis van deze feedback en literatuur is een vierde ontwerp eis toegevoegd:

4. *Leerlingen moeten op hun eigen niveau en tempo kunnen werken. Met andere woorden: het te ontwerpen instrument moet kunnen **differentiëren**.*

Eveneens is de ontwerp vraag aangescherpt: *Hoe kunnen mijn wiskunde-B-leerlingen probleemoplossende vaardigheden aanleren m.b.v. scaffolding t.b.v. het oplossen van een meetkundig probleem?*

Tot slot bleek tijdens een plenaire bespreking met begeleiders en medestudenten dat de informatie uit de vragenlijsten en uit de lessen zelf nog te beperkt is om gefundeerde uitspraken te doen in hoeverre deze manier van scaffolding de leerlingen echt helpt bij het verbeteren van hun probleemoplossende vaardigheden bij meetkunde. Daarnaast bleek het geen goede afweging te zijn geweest om de vragenlijsten niet 'op naam' te laten invullen, gezien je nu geen koppeling gemaakt kon worden tussen de andere data. Op basis van bovenstaande feedback en de vier ontwerp eisen is het tweede ontwerp gemaakt:

### **Het tweede ontwerp: Gedifferentieerd probleemoplossen in Geogebra**

De HP Reveal-app uit het eerste ontwerp heeft als nadeel dat je er geen interactieve elementen in kan verwerken. Het is dus niet mogelijk om bijvoorbeeld knoppen toe te voegen waardoor leerlingen kunnen kiezen uit het aantal of de moeilijkheidsgraad van de hints. Hierdoor kan je dus lastig een vorm van differentiatie integreren. Daarnaast bleek, erg onfortuinlijk, dat medio januari 2020 de app er mee zou stoppen. Deze twee zaken dwongen mij ertoe om naar andere digitale platformen te kijken die meer mogelijkheden boden. Gezien de leerlingen positief waren over het AR-gedeelte, is er lang gezocht naar een vergelijkbaar alternatief. Deze bleek helaas nog niet te bestaan, waardoor ik ook andere typen platformen heb onderzocht. Na veel zoeken en uitproberen ben ik 'teruggekomen' bij Geogebra. Geogebra stond reeds in mijn *morfologische kaart*, welke was opgesteld in de fase vóór het eerste ontwerp. Er kleefden wel twee nadelen aan: enerzijds is het iets minder toegankelijk dan de HP Reveal-app en anderzijds is het erg bewerkelijk om één app per opgave te maken, laat staan voor een hele serie opgaven.

Elk nadeel heeft zijn voordeel: Geogebra biedt veel ontwerp opties en het is gericht op meetkunde. Hierdoor zou ik de vierde ontwerp eis kunnen waarborgen en iets moeten inboeten op de tweede ontwerp eis (toegankelijkheid). Om dit deels op te lossen heb ik de apps gebundeld in een digitaal boek en een QR-code aangemaakt, zodat leerlingen relatief snel bij het digitale boek konden komen. De QR-code is hiernaast afgebeeld en de link naar het digitale Geogebra boek is: [www.geogebra.org/m/rtu6bt27](http://www.geogebra.org/m/rtu6bt27)



De apps zijn gebundeld in een digitaal boek dat overeenkomt met de opzet van de methode. Bij elke (huiswerk)opgave uit de studieplanning is een app ontwikkeld, behalve voor de opgaven die klassikaal worden behandeld. Dit resulteerde in 31 apps. Elke app bestond uit een aantal vaste onderdelen:

- Een *algemeen stappenplan* om meetkundige problemen op te lossen, gebaseerd op Van Helden et al. (2011), welke op hun beurt refereren naar het bekende werk van de wiskundige George Pólya, genaamd 'How to solve it' uit 1945.
- Het *meetkundig probleem* (de opgave) uit de lesmethode Getal & Ruimte.
- Een knop om *voorkennis* te activeren als de leerling vermoedt dat hij/zij deze nodig had. Dit sluit aan bij Drijvers et al. (2013) m.b.t. het adequaat oproepen van *relevante wiskundige kennis* uit het relatiernetwerk, het *gereedschap*. En sluit aan bij Chi et al. (1979) die benadrukken dat het verschil tussen experts en beginners zowel kwalitatief als kwantitatief is en de (voor)kennis bij beginners dus minder is dan bij experts.
- Een aantal knoppen om *hints* te verkrijgen. Deze hints zijn oplopend qua ondersteuning en (bijna) altijd in vragende vorm. De eerste hint is vaak vrij algemeen en de volgende hint is weer iets specifieker. Afhankelijk van de opgave zijn er doorgaans drie tot vijf hints. Deze hints zijn gekoppeld aan visuele elementen, zoals het geven van een hulplijn (indien van toepassing). Deze aanpak is gestoeld op de drie voorwaarden van Van de Pol et al. (2010) waaraan scaffolding dient te voldoen.
- Een knop met het *antwoord*, zodat de leerling zichzelf kan controleren en het uitwerkingenboek in principe niet nodig heeft.

- Een knop voor *feed forward*. Deze knop geeft de leerling *feed forward* over hoe hetgeen hij/zij geleerd had in de toekomst kon worden ingezet. Dit element is toegevoegd in het kader van het terugblikken op wat je hebt gedaan. Van Helden et al. (2011) stellen namelijk dat reflecteren op eigen handelen bij probleemoplossen van belang. De leerling moet zich bewust zijn van de stappen die hij/zij heeft gezet, welk gereedschap er is toegepast, welke zaken je hebben geholpen om je blik te doen verruimen of juist te verwisselen.

Deze apps heb ik vervolgens toegepast in mijn *4vwo-wiskunde-B-klas*, gezien bij mij *5havo-klas* het onderwerp ondertussen gepasseerd was en ook *4vwo* veel moeite heeft met dit onderwerp. Om de leerlingen er mee aan de slag te laten gaan heb ik de eerste les besteed aan de uitleg en het belang van de apps. Ik heb eveneens een overzicht op papier gemaakt met hierop het algemene stappenplan om een meetkundig probleem op te lossen, het belang van de app, de link, de QR-code, de planning inclusief de opgaven waarvoor een app is ontwikkeld en uitleg over exit cards. Bij een groot aantal lessen zijn vervolgens *exit cards* afgenomen. Exit cards zijn kaartjes die de leerlingen aan het einde van de les invullen waarbij ze kenbaar maken wat ze de les hebben gedaan en hebben geleerd (of nog willen leren). Het is een middel om voor de docent en leerling zicht te krijgen op het leerproces en de leerling eigenaar te maken van zijn eigen leerproces. Deze vragen zijn gebaseerd op een 25-tal typen vragen die je kan gebruiken voor exit cards bij wiskunde (Chubb, 2016). Aan het einde van het meetkundehoofdstuk is een *toets* afgenomen en een *vragenlijst*.

Er is gekozen om te werken met vragenlijsten, omdat dit een gestructureerd instrument is om bij een brede groep personen nauwkeurig informatie te verzamelen. Het leent zich goed om gegevens over meningen, ervaringen, gebeurtenissen en legitimering te verzamelen (Harinck, 2010). Op deze wijze kon ik de leerlingen bevragen over of en hoe ze hebben gewerkt met de app, of ze het idee hadden dat het ze hielp bij het oplossen van de problemen en het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. T.o.v. het eerste ontwerp heb ik ditmaal de vragenlijst beter toegespitst op probleemoplossende vaardigheden en de leerlingen de naam laten invullen op de vragenlijst, zodat ze gekoppeld konden worden aan de exit cards en de resultaten. Om ook grip te krijgen op de voortgang van het gebruik van het instrument heb ik gebruik gemaakt van exit cards, welke vanuit methodologisch perspectief beschouwd kunnen worden als mini-vragenlijstjes. Op deze wijze krijg je een beter beeld van het proces i.p.v. alleen een eindopname. De toets is een gestandaardiseerd instrument om na te gaan in hoeverre de leerling bepaalde kennis en vaardigheden beheerst (Harinck, 2010), in dit geval kennis over de meetkundige instrumenten en de probleemoplossende vaardigheden bij meetkunde. Tot slot is er ook *informeel* gebruik gemaakt van *vrije observatie*. Observatie is een waarnemingsmethode waarbij de onderzoeker op een zo objectief mogelijke manier informatie probeert te verkrijgen en hierbij zelf passief blijft (Harinck, 2010). Als docent observeer je in principe de gehele les, maar vond ik het niet verenigbaar met mijn rol als docent. Tijdens de les heeft de docent namelijk dusdanig veel andere zaken aan het hoofd, dan van een objectieve en passieve observatie geen sprake kan zijn. Echter vallen wel zaken op die je tijdens de werkzaamheden observeert, die je wellicht later kan koppelen aan uitkomsten van de vragenlijst, exit cards of toetsen.

De leerlingen zijn vervolgens dertien lessen aan de slag gegaan met de apps. Het idee achter dit ontwerp is de leerling zelf kan bepalen of hij of zij voorkennis wil opfrissen, hoeveel hints nodig worden geacht en of er behoefte is aan *feed forward* (ontwerpeis 4; differentiatie). Middels het digitale boek en de QR-code heb ik de toegankelijkheid gewaarborgd (ontwerpeis 2) en mogelijk te maken dat ze het op elke plek kunnen gebruiken die ze willen (ontwerpeis 3; plaatsonafhankelijkheid). De eerdergenoemde opbouw moet de leerlingen structuur en overzicht gaan bieden als ze er mee gaan werken (ontwerpeis 1).

### **Betere differentiatie, maar heeft het de leerlingen geholpen betere probleemoplossers te worden?**

Als we kijken naar hoe leerlingen de apps hebben ervaren, heeft dat sterke overeenkomsten met het eerste ontwerp. Leerlingen vonden de app handig in gebruik, de hints helder beschreven en een groot deel gaf aan minder snel naar het uitwerkingenboek te grijpen. Ook de vragen omtrent het verbeteren van de probleemoplossende vaardigheden werden door een groot deel positief beantwoord. In het algemeen kan ook worden gesteld dat de leerlingen in deze klas een beter resultaat hebben behaald t.o.v. de parallelklas en t.o.v. vorig jaar. Om de gegevens uit de vragenlijsten, exit cards en de toetsen te kunnen duiden, grijpen we terug naar de literatuur over *scaffolding* en de denkniveaus van Van Hiele en voegen daar literatuur over de componenten van *wiskundige bekwaamheid* (Van Streun, 2001), de *zelfdeterminatietheorie* van Ryan & Deci

(2000) en verderop ook de taxonomie van Anderson en Krathwohl (2001) aan toe. Van Streun (2001) heeft vijf componenten van wiskundige bekwaamheid gedefinieerd die de doelen van wiskundeonderwijs vormen:

- *Weten dat*: Kennis van feiten en begrippen, reproduceren, technieken beheersen.
- *Weten hoe*: Probleemaanpak, toepassen, onderzoeksvaardigheden.
- *Weten waarom*: Concepten, abstracties, rijke schema's, argumenteren, overzicht.
- *Weten over weten*: Reflecteren, monitoren, kennis over je eigen weten en aanpak.
- *Houding*: Wiskunde leren is leuk, interessant, groei in kennis geeft voldoening.

Wiskundige *houding* sluit aan bij de *zelfdeterminatietheorie* van Ryan & Deci (2000). Zij stellen dat intrinsieke motivatie wordt bevorderd als de leerling een gevoel van autonomie heeft, vertrouwen heeft in eigen kunnen (competent is) en vertrouwen heeft in de ander. Voor een bovenbouwleerling in 4vwo of 5havo wordt *uiteindelijk* verwacht dat ze op (het begin van) Van Hieleniveau 4 (informele deductie) zitten en dat ze het *weten waarom* van de meetkundige onderwerpen begrijpen. Hierdoor kunnen leerlingen relaties leggen en deductieve stappen uitvoeren, waardoor probleemoplossende vaardigheden verbeteren.

Om een genuanceerd beeld te krijgen van de werking van het instrument zijn de leerlingen gecategoriseerd. Het is in het onderwijs erg lastig om onderzoeksmatig leerlingen of klassen met elkaar te vergelijken, gezien er te veel verschillende factoren een rol spelen. We kunnen de leerlingen wel met zichzelf vergelijken. M.a.w. hoe presenteren de leerlingen t.o.v. wat je van hen zou verwachten. Een indicator hiervoor is hun gemiddelde cijfer (na een half schooljaar) t.o.v. het cijfer dat ze behalen voor de toets. Voorbeeld: Een '8' is weliswaar een mooi cijfer voor een meetkundetoets, maar zou ook kunnen zeggen dat het voor de betreffende leerling een relatief zwak onderdeel is gezien de leerling gemiddeld een 9,5 staat. Andersom is ook het geval; een 5,5 is wellicht een magere voldoende, maar kan ook zeggen dat de leerling echt progressie heeft geboekt bij dit onderdeel gezien de leerling gemiddeld een 4,5 staat. Hierbij is 'het cijfer' dus niet zo zeer een kwantitatieve benadering, maar meer een *indicator* om te kunnen bekijken of de leerling op een lastig onderwerp als meetkunde al dan niet progressie boekt i.c.m. het ontwikkelde instrument. Zodoende kunnen we vier typen leerlingen onderscheiden, namelijk: De leerlingen die een positief of negatief resultaat hebben behaald. Een positief resultaat is gedefinieerd als het cijfer op de toets gelijk of hoger is dan het gemiddelde eindcijfer van de leerling vóór de toets. Een negatief resultaat is gedefinieerd als het cijfer op de toets lager is dan het gemiddelde eindcijfer vóór de toets. De andere categorie zijn de leerlingen die wel of niet gebruik hebben gemaakt van de apps. Dit kan worden beoordeeld aan de hand van de afgenomen vragenlijsten, exit cards en observaties. Dit levert onderstaande tabel op:

	<i>Apps toegepast</i>	<i>Apps niet toegepast</i>
<i>Positief resultaat</i>	13 leerlingen (57%). Casus: Quirine (Toets: 7,6/ Gem: 5,3)	3 leerlingen (13%). Casus: Jan (Toets: 7,2/Gem: 7,2)
<i>Negatief resultaat</i>	6 leerlingen (26%). Casus: Daan (Toets: 2,4/ Gem: 4,6)	1 leerling (4%). Casus: Pien (Toets: 4,8/ Gem: 5,7)

In elk kwadrant staat het aantal leerlingen dat aan beide voorwaarden voldoet en een casus. Het valt op dat een groot deel (70%) een positief resultaat heeft behaald en ook een groot deel de apps heeft toegepast (83%). De casussen zijn geselecteerd o.b.v. de volgende twee voorwaarden: Ten eerste moet de bij de casus het (leer)proces

duidelijk inzichtelijk zijn. Hiermee wordt bedoeld dat de uitkomsten van de vragenlijsten, exit cards, toets en observaties een duidelijk beeld hebben gegeven van hoe deze leerling het instrument heeft toegepast en of dit invloed heeft gehad op het leren. Ten tweede dienen de casussen te voldoen aan de categorieën. De casussen zijn in zekere zin representatief voor elk kwadrant, omdat ze aan beide twee voorwaarden voldoen, maar dat wil niet zeggen dat dit voor elke leerling in het betreffende kwadrant in dezelfde mate van toepassing is. Aan de hand van de eerder beschreven literatuur zal voor elke casus een verklaring worden gegeven, waarbij de namen om privacyoverwegingen zijn veranderd:



- **Casus & kwadrant 1 – Quirine – Gebruik gemaakt van apps & positief resultaat**

Wat opvalt aan Quirine is dat ze bijna bij elke opgave de apps heeft gebruikt en dat ze positief is over het gebruik ervan. Dit geeft ze zowel aan in haar vragenlijst als op haar exit cards. Ze schrijft: *“Ik kon de opdrachten sneller oplossen en ik begreep ook gelijk waarom het zo moest.”* Opvallend aan deze uitspraak is dat ze zegt dat ze het enerzijds ‘sneller’ kon oplossen, dus ze zag de apps niet als een praktische belemmering. Anderzijds geeft ze aan dat ze ook begreep ‘*waarom*’ het op deze manier moest. Het *weten waarom* (Van Streun, 2001) is essentieel om te groeien binnen de Van Hieleniveaus, het levert namelijk verbindingen (rijke schema’s) en argumenten op die de leerling helpen om informeel te deduceren (niveau 4), waardoor ze het niveau bereikt dat van haar gevraagd wordt.



“Ik kon de opdrachten sneller oplossen en ik begreep ook gelijk waarom het zo moest.”

Wat verder opvalt uit Quirine haar exit cards en observaties is dat ze veel heeft geoefend met de opgaven zowel in de klas als thuis en dat ze ook de hulp van de docent inschakelt als ze er m.b.v. de hint toch niet uitkomt. Er is dus ook sprake van een wiskundige *houding* en het leren is niet beperkt tot het gebruiken van de apps.

- **Casus & kwadrant 2 – Jan – Geen gebruik gemaakt van apps & positief resultaat**

Jan heeft naar eigen zeggen de apps niet (actief) gebruikt. Hij heeft er wel naar gekeken en proberen er mee te werken, maar heeft gedurende het hoofdstuk besloten dat dit niet aansluit bij zijn manier van leren. Dit blijkt ook uit zijn vragenlijst een gedeeltelijk uit zijn exit cards. Wat sterk naar voren komt bij Jan, uit observatie en zijn exit cards, is dat hij erg de hulp van anderen nodig heeft om verder te komen in zijn leren. Hij vraagt (opvallend) veel aan de docent, maar ook aan zijn medeleerlingen. Zo schrijft hij op zijn exit cards wat hem die les geholpen heeft: *“Marcel (Marcel is best slim)”*. Op zijn vragenlijst zegt hij over de verbeteringen: *“Misschien in plaats van 3 grote hint 5 kleinere hints zodat je nog meer zelf moet doen zonder hulp van docent”*. Hieruit kan worden opgemaakt dat de hints niet goed aansloten bij zijn leerbehoefte.

Wat ook opvalt is dat Jan veel heeft geoefend met de opgaven en dat er een sterke wil is om het te begrijpen. Hier zie je parallellen met de eerste casus; er is sprake van een wiskundige *houding* en er is behoefte om te *weten waarom* het zo is. Met zijn eigen leerstrategie en houding heeft hij ervoor gezorgd dat hij is gegroeid binnen de Van Hieleniveaus.

- **Casus & kwadrant 3 – Daan – Gebruik gemaakt van apps & negatief resultaat**

Daan heeft gebruik gemaakt van de apps, net zoals Quirine (casus 1), maar heeft een slecht resultaat gehaald op de toets: een 2,4. Op de stelling *‘Door het gebruik van de apps kan ik beter een plan opstellen om een meetkundig probleem op te lossen’* reageert Daan dat hij het hiermee oneens is, maar geeft als toelichting: *“Ik had een 2,4 maar dat is meer mijn schuld doordat ik te weinig heb geoefend.”* Daarnaast heeft hij de apps minder intensief gebruikt dan Quirine (casus 1), namelijk bij enkele opgaven. Het startniveau van Daan is moeilijk te bepalen, maar ligt vermoedelijk lager dan die van Quirine en Jan (casus 1 en 2), gezien zijn gemiddelde voorafgaande aan het onderwerp meetkunde. Vanuit dit niveau heeft hij enerzijds te weinig geoefend en anderzijds minder gebruik gemaakt van de apps die hem werden aangeboden. Ook heeft hij minder gebruik gemaakt van de hulp van de docent. Hierdoor heeft hij te weinig progressie geboekt om Van Hieleniveau 4 te bereiken. Vanuit de categorieën van wiskundige bekwaamheid (Van Streun, 2001) kan je stellen dat Daan meer met de vragen bezig was over *weten dat* en *weten hoe*, dan *weten waarom*. En dat zijn wiskundige *houding* nog niet (voldoende) aanwezig is.

Vanuit de karakteristieken van de Van Hieleniveaus (Usiskin, 1982) kan nog een andere verklaring gevonden worden naast die van de *vaste volgorde* van niveaus, namelijk die van *scheiding* en *nabijheid*. Als de voorkennis op een ander niveau zit dan de hints in de apps, maar ook dat van de methode, dan kan je ‘elkaar’ niet begrijpen. M.a.w. de apps gaan uit van een bepaald basisniveau, ongeveer begin niveau 3, maar Daan zat vermoedelijk nog op niveau 2, waardoor het voor hem ‘onmogelijk’ is om (de taal van) niveau 3 te begrijpen. Zijn kennis en vaardigheden waren nog niet genoeg geïnternaliseerd om naar een volgend Van Hieleniveau te kunnen gaan. M.a.w. het volgende niveau is nog niet voldoende *nabij*.

- **Casus & kwadrant 4 – Pien – Geen gebruik gemaakt van apps & negatief resultaat**

De laatste casus is die van Pien. Ze heeft geen gebruik gemaakt van de apps en heeft een negatief resultaat. Op de vraag waarom ze de apps niet heeft gebruikt, antwoordt ze op de vragenlijst: *“Ik snapte de uitleg van het uitwerkingenboek online en ik heb YouTube filmpjes gekeken als ik het niet begreep.”*

“Ik snapte de uitleg van het uitwerkingenboek online en ik heb YouTube filmpjes gekeken als ik het niet begreep.”

Op de exit cards schrijft ze regelmatig bij hetgeen haar geholpen heeft de stof te begrijpen *“de gele vlakken”* (dat zijn de theorieblokken in het boek) en de *“uitleg”*. Als één van de weinige leerlingen had ze vaak haar uitwerkingenboek geopend, tegen mijn advies in om uitwerkingenboeken zo min mogelijk te gebruiken. Tot slot blijkt uit de exit cards en observaties dat de productiviteit bij Pien in de les lager lag dan bij Quirine en Jan (casus 1 en 2).

Pien heeft dus net als Jan in casus 2 zelf een leerstrategie bepaald en ervoor gekozen om niet de apps te gebruiken. Echter heeft ze zich erg gefocust op theorieblokken, klassikale uitleg en uitlegvideo's. Deze vormen richten zich sterk op het *weten dat* en *weten hoe* en minder op het *weten waarom* (Van Streun, 2001). Er wordt vaak een opgave of theorie uitgelegd, maar hierdoor leert ze niet waarom een bepaalde aanpak wordt gekozen of waarom het meetkundig gereedschap op die wijze werkt. Ze heeft zichzelf niet uitgedaagd *“to achieve a goal which would be beyond his unassisted efforts”* (Wood, Bruner, & Ross, 1976, p.90).

Haar startniveau is lastig te bepalen, maar dit is vermoedelijk niet lager dan die van Quirine en Jan (casus 1 en 2). Echter heeft zij vanuit dat niveau niet of nauwelijks progressie geboekt omdat haar leerstrategie minder effectief was. Het wil niet zeggen dat het gebruik van de apps had gezorgd dat ze een (veel) beter resultaat had behaald, zie hiervoor Daan (casus 3), maar het was waarschijnlijk wel een strategie die haar meer had kunnen opleveren.

#### **Welke conclusie kunnen we trekken uit deze vier kwadranten?**

De casus uit kwadrant 1 toont aan dat scaffolding in de vorm van het geven van hints, voorkennis en feed forward in een digitale omgeving nuttig kan zijn voor leerlingen en hierdoor kunnen groeien binnen de niveaus van Van Hiele. Het dwingt hen het uitwerkingenboek aan de kant te leggen, zelf opzoek te gaan naar oplossingsstrategieën en zichzelf vaker de *waaromvraag* te stellen. Voorwaarde is wel een wiskundige *houding*, met andere woorden de wil, de motivatie en het zelfvertrouwen om eraan te beginnen. Dit uit zich vaak in het maken van de opgaven en het stellen van vragen als je vastloopt. Er wordt in de vragenlijsten aangegeven dat de apps het gevoel van autonomie hebben versterkt. Vanuit het perspectief van de *zelfdeterminatietheorie* van Ryan & Deci (2000) kan dit benaderd worden als *intrinsieke motivatie*, wat gevoed wordt door een gevoel voor autonomie en vertrouwen in eigen kunnen en vertrouwen in de ander.

De casussen uit kwadrant 2 en 3 benadrukken juist dat de apps een middel zijn en geen doel. Met andere woorden dit middel hoeft niet voor iedereen te werken. Voor leerlingen die op een ander Van Hiele-niveau zitten zullen de hints in de apps alsnog niet begrijpen en blijven vastzitten op een te laag niveau. Dit zijn de leerlingen die met een onvoldoende voorkennis uit de onderbouw zijn gekomen en zodoende op een achterstand beginnen. Het is voor deze leerlingen lastig om dit 'in te halen', dit vergt veel oefenen en veel hulp vragen. De vraag is of de voorkennis en de hints dan op een lager niveau moeten worden ingezet binnen de apps. Hier schuilt het gevaar in dat het instrument niet meer interessant wordt voor de groep die wel met het gevraagde voorkennisniveau 'binnenkomt', omdat het de complexiteit en de cognitieve uitdaging van het probleem doet afnemen, waar Anderson (1989) en Henningsen en Stein (1997) voor waarschuwen. Leerlingen die op het gevraagde niveau binnenkomen en juist in staat zijn om een andere succesvol middel te vinden, kunnen wel groeien binnen Van Hiele-niveaus, maar dat gaat samen met een wiskundige houding en het betrekken van de docent of anderen.

Uit casus 4 blijkt dat wanneer je geen gebruik maakt van de apps, maar ook geen andere effectieve manier van leren vindt om zelf oplossingsstrategieën te kunnen ontwikkelen, de progressie m.b.t. probleemoplossen minimaal zal zijn. Het blijven hangen in de *weten dat* en *weten hoe* vragen en niet de uitdaging aangaan om een niveau verder te komen, wat zich vaak uit in gebrek aan wiskundige *houding*, lijken funest te zijn. Dit kan ook in het licht worden gezien van de theorie van Anderson en Krathwohl (2001). Zij hebben de welbekende taxonomie van Bloom aangescherpt en stellen dat er zes denkniveaus zijn, van laag naar hoog: onthouden, begrijpen, toepassen, analyseren, evalueren en creëren. De onderste drie worden als 'lagere' denkniveaus

aangemerkt en de bovenste drie als 'hogere' denkniveaus. In dit kader zou gesteld kunnen worden dat casus 4 te veel blijft 'hangen' in de lagere niveaus, terwijl juist gevraagd wordt om te reiken naar de hogere niveaus, zoals analyse. Opvallend is dat Anderson & Krathwohl stellen dat de taxonomie nooit bedoeld is als volgorde, terwijl Usiskin (1982) stelt dan één van de vier belangrijke karakteristieken van de Van Hielenniveaus is dat er een *vaste volgorde* in zit. Gezien de Van Hielenniveaus zich specifiek richten op meetkunde en uit de praktijk blijkt dat leerlingen met een beperkt begrip (begrijpen) en te weinig hebben geoefend (toepassen), ben ik van mening dat een *vaste volgorde* zeker aanwezig is binnen dit kader.

Naast het gebruik van de apps lijkt een wiskundige *houding* en hulp durven vragen (van een docent) voorwaardelijk voor een positief resultaat, mits het beginniveau aansluit bij wat gevraagd wordt op het betreffende niveau. Het belang van de ondersteuning van een docent wordt ook benadrukt door Van de Pol et al. (2010), Van der Vegt et al. (2009) en Vygotski (1978).

### Discussie & beperkingen

Het is niet eenvoudig om grip te krijgen op de probleemoplossende vaardigheden van je leerlingen, laat staan om een instrument of methode te ontwikkelen die elke leerling helpt om deze vaardigheden te verbeteren. Zoals de Belgische onderwijsonderzoeker Pedro de Bruyckere schreef: *"Niet alles werkt en niets werkt altijd in het onderwijs"* (Ex, 2020). Er bestaat geen gouden ei dat bij iedereen werkt, daarvoor zijn er in het onderwijs te veel factoren die een rol spelen. Men zal dan grote groepen met elkaar moeten vergelijken onder dezelfde omstandigheden, wat vaak erg lastig is. Dat is ook een beperking van dit onderzoek, welke gericht is op twee klassen. Daarnaast zorgt het karakter van het onderzoek, namelijk *'Design as Research'*, ervoor dat je als docent zowel op het *ontwerpen & ontwikkelen* als *onderzoeken* tegelijkertijd moet richten, wat niet eenvoudig is en waardoor het één wel eens te koste gaat van het ander. We moeten dan ook oppassen met het generaliseren van de resultaten uit dit onderzoek.

Vanuit de verlegenheids situatie en ontwerpisen bekeken laat dit onderzoek wel zien dat een dergelijk instrument de leerling kan helpen bij meer complexe meetkundige problemen en dat het ervoor zorgt dat een leerling minder snel naar het uitwerkingenboek grijpt en eerder geneigd is het zelf op te lossen (ontwerpeis 1). Dit laat de behoefte zien aan een instrument dat staat 'tussen' de opdracht en de uitwerking. Het eerste ontwerp benadrukt echter dat het dan wel gedifferentieerd moet worden aangeboden op een toegankelijke manier (ontwerpeisen 2 en 4). Daarnaast sluit het aan bij een veranderende leeromgeving (ontwerpeis 3), waarbij leerlingen leren op tijden en plekken die bij hen aansluiten en waar niet altijd een docent aanwezig is (Burg, 2009). Dit betekent niet dat dit voor iedereen werkt; het is van belang dat de leerling een bepaald basisniveau heeft, waardoor geen sprake kan zijn van *scheiding* tussen de niveaus (Usiskin, 1982) maar ook dat deze vorm van leren bij de leerling aansluit. Voor de leerlingen bij wie dit *middel* wel aansluit, ben ik ervan overtuigd dat het de probleemoplossende vaardigheden doet vergroten; het stimuleert de leerling vragen te stellen aan zichzelf, erachter te komen *hoe* het moet, maar ook *waarom* het zo moet (Van Streun, 2001), waardoor uiteindelijk rijke schema's ontstaan (Drijvers et al, 2013). Het instrument voldoet daarmee aan de ontwerpisen en de randvoorwaarde die zijn opgesteld, maar dat betekent niet dat het niet voor verbetering vatbaar is en dat er wellicht niet nog extra ontwerpisen aan toegevoegd moeten worden. Met name de eerste ontwerpeis *"het te ontwerpen instrument moet de leerlingen ondersteunen in het verkrijgen van overzicht en structuur en wat de plek van hun (parate) voorkennis hierin is"* is niet van toepassing op elke leerling. Dit is geen probleem als de leerling zelf in staat is een alternatieve werkwijze te bewerkstelligen om zodoende op het Van Hielenniveau 4 te komen en de waaromvragen achter de theorie kan beantwoorden en in de hogere denkniveaus te geraken (De Villiers, 2010; Van Streun, 2001; Anderson & Krathwohl, 2001). Het is wel een beperking als het van toepassing is op leerlingen die wel het instrument willen gebruiken, maar waarbij gevraagde entreeniveau te laag is, waardoor er een scheiding is van niveaus (Usiskin, 1982). M.a.w. het instrument en de leerling elkaar niet begrijpen. Om dit probleem op te vangen hoeft ontwerpeis 1 niet worden aangepast, maar zou een vijfde ontwerpeis dit kunnen opvangen:

- *Ontwerpeis 5: Het te ontwerpen instrument moet de leerlingen kunnen monitoren in de voortgang die zij boeken en moet inzichtelijk zijn voor docent en leerling.*

Hierdoor kan leerling en docent in een eerder stadium opmerken dat een leerling extra, individuele ondersteuning nodig heeft, om het hiaat in voorkennis te overbruggen. Indicatoren binnen het ontwerp kunnen zijn; het niet gebruiken van de app of juist steeds alle hint nodig hebben om een probleem op te lossen, waardoor er niet wordt voldaan aan de voorwaarden van scaffolding (Van de Pol et al. 2010); de

ondersteuning vermindert geleidelijk en er is een duidelijke transfer van verantwoordelijkheid richting de leerling. Dit is ook wenselijk vanuit het perspectief van *differentiëren*. Weliswaar kan in het tweede ontwerp beter gedifferentieerd worden middels scaffolding in de apps, maar Van der Vegt et al. (2009) benadrukken dat de ondersteuning van een docent bij zowel de inzet van ICT als bij scaffolding van belang blijft. In dit kader zou het tweede ontwerp ook vanuit een ander perspectief ingezet kunnen worden, namelijk doordat de app ondersteuning biedt aan een groot deel van de klas, ontstaat er ruimte voor de 'paar' leerlingen die een dusdanige achterstand hebben dat het instrument niet bij hen aansluit. In dit licht heeft ontwerp 5 een signalerende functie. Het ontbreken van deze vijfde ontwerp 5 kan als een beperking worden opgevat in dit onderzoek, maar zou vanuit technisch perspectief voorsnog lastig te implementeren zijn binnen de gestelde kaders.

### **Aanbevelingen**

Om dit instrument effectiever te maken zal het moeten worden getest op een grotere groep leerlingen en nog nauwkeuriger worden gemonitord om zodoende nog beter te weten te komen wat de leerling kan helpen in het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden.

Op technisch gebied zou het een toevoeging zijn als het eerste en tweede ontwerp gecombineerd zouden kunnen worden, met andere woorden dat de leerling de toegankelijkheid heeft van 'augmented reality' maar de dynamiek en differentiatie van het Geogebra-boek. Een leerling geeft als verbetering: *"Het makkelijker maken om de app te openen"*. Het zou de docent helpen als deze app vervolgens meer 'real time' informatie en statistieken zou geven, zodat je als docent beter kan zien welke leerlingen het gebruiken, bij welke opdracht, welke hints ze gebruiken en hoeveel hints ze gebruiken. Hierdoor zou de docent eerder de zwakkere schakels er tussenuit kunnen halen en deze leerlingen extra kunnen begeleiden. Zoals de casussen laten zien is de ondersteuning van de docent nog steeds van belang om vooruitgang te boeken evenals een wiskundige houding.

Tot slot zou het een aanwinst zijn als de leerling binnen de apps meer zou kunnen *exploreren*; het 'spelen' met wiskunde kan bijdragen aan het stimuleren tot wiskundig denken, bewijzen en conceptvorming, indien de functie van ICT gericht is op *begripsvorming* (Drijvers et al, 2013). Ik heb gepoogd dit te integreren in de apps, maar ben van mening dat dit nog onvoldoende gelukt is. ICT-tools zijn namelijk bij uitstek geschikt om concepten te visualiseren, waardoor een veelzijdiger en rijker cognitief schema ontstaat. Leerlingen zouden dan niet alleen kunnen ontdekken wat de oplossingsstrategie is van een betreffend probleem, maar ook zichzelf (hypothetische) vragen kunnen stellen in de trant; 'wat als deze hoek nu niet recht was geweest?'

Al met al geloof ik dat we met de huidige technieken veel meer uit het onderwijs kunnen halen dan we nu doen en het vak wiskunde veel levendiger kunnen maken dan het nu is, zonder de docent extra te belasten, integendeel. Het richten hierbij op probleemoplossende vaardigheden kan hierin een centrale rol spelen, gezien dit ook een belangrijke competentie is bij andere vakken en in de maatschappij. Verschoor & Bruin-Muurling (2015) zien digitalisering als één van de drie ontwikkelingen rond de vernieuwing van het wiskundeonderwijs en de 21<sup>e</sup> eeuw, waarbij ze één gemene deler opmerken in deze drie stromen, namelijk de grote(re) rol die probleemoplossen en kritisch wiskundig denken wordt toegeschreven in de maatschappij en *"vanuit een retrospectief op het huidige onderwijs lijkt de les te zijn dat we de leerlingen actief aan het denken moeten zetten"* (p.47).

## Referenties

- Anderson, L. (1989). Classroom instruction. In M. Reynolds, *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 101-115). Washington D.C.: American Association of Colleges for Teacher Education.
- Anderson, L., & Krathwohl, D. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives (Abridged Edition)*. New York: Longman.
- Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. New York: Routledge.
- Burg, G. (2009). *Leerpleinen! Wegwijzer voor het voortgezet onderwijs*. Amersfoort: CPS.
- Chi, M., Feltovich, P., & Glaser, R. (2018). Beginners denken anders dan experts. In P. A. Kirschner, L. Claessaens, & S. Raaijmakers, *Op de schouders van reuzen* (pp. 40-44). Meppel: Ten Brink Uitgevers.
- Chubb, M. (2016, juli 4). *Exit Cards – What do yours look like?* Opgehaald van [buildingmathematicians.wordpress.com: https://buildingmathematicians.wordpress.com/2016/07/04/exit-cards-what-do-yours-look-like/](https://buildingmathematicians.wordpress.com/2016/07/04/exit-cards-what-do-yours-look-like/)
- De Villiers, M. (2010). Some reflections on the Van Hiele theory. *4th Congress of teachers of mathematics* (pp. 1-36). Zagreb: Croatia Mathematical Society.
- Denessen, E. (2017). *Verantwoord omgaan met verschillen: socialeculturele-culturele achtergronden en differentiatie in het onderwijs (inaugurale rede)*. Leiden: Universiteit Leiden.
- Drijvers, P. (2015). Denken over wiskunde, onderwijs en ICT. *Oratie*. Utrecht: Universiteit Utrecht - Freudenthal Instituut.
- Drijvers, P. (2015). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides 90(5)*, 4-8.
- Drijvers, P., van Streun, A., & Zwaneveld, B. (2013). *Handboek wiskundededidactiek*. Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Ensie. (2020, maart 21). *Randvoorwaarden*. Opgehaald van [ensie.nl: https://www.ensie.nl/redactie-ensie/randvoorwaarden](https://www.ensie.nl/redactie-ensie/randvoorwaarden)
- Ex, E. (2020, februari 12). Mijn favoriete motto: Niet alles werkt en niets werkt in het onderwijs. *Trouw*.
- Harinck, F. (2010). *Basisprincipes praktijkonderzoek*. Antwerpen - Apeldoorn: Garant.
- Henningsen, M., & Stein, M. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28(5)*, 524-549.
- Kerpel, A. (2014, juni 1). *Differentiatie*. Opgehaald van [wij-leren.nl: https://wij-leren.nl/differentiatie-uitleg.php](https://wij-leren.nl/differentiatie-uitleg.php)
- Plomp, T. (2010). Educational design research: An introduction. In T. Plomp, & N. Nieveen, *An introduction to educational design research* (pp. 9-35). Enschede: SLO.
- Ryan, R., & Deci, E. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist (55)*, 68-78.
- Science Direct. (2020, maart 21). *Design Requirement*. Opgehaald van [sciencedirect.com: https://www-sciencedirect-com.lib.fontys.nl/topics/engineering/design-requirement](https://www-sciencedirect-com.lib.fontys.nl/topics/engineering/design-requirement)
- SLO. (2019, oktober 22). *Ontwerpeisen*. Opgehaald van [slo.nl: https://slo.nl/@11556/ontwerpeisen/](https://slo.nl/@11556/ontwerpeisen/)
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry. Final report of the CDASSG Project*. Chicago: University of Chicago.

- Van de Pol, J., Volman, M., Oort, F., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher-student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review*, 22, 271-296.
- Van der Vegt, A., Kieft, M., & Bekkers, H. (2009). *Differentiatie in de klas: wat werkt?* Den Haag: Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO).
- Van Helden, H., Krabbendam, H., & Konings, T. (2011). *Probleemoplossen en wiskunde; Leren effectief lesgeven*. Meppel: Ten Brink.
- Van Streun, A. (2001). Het denken bevorderen. *Oratie Rijksuniversiteit Groningen*. Groningen.
- Verschoor, M., & Bruin-Muurling, G. (2015). Reken-wiskundige inzichten en 21st century skills. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 44-54.
- Vygotski, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge.
- Wood, D., Brunser, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.