

WISKUNDIG LEREN DENKEN

Praktijkgericht onderzoek naar hoe de leerkrachten het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 kunnen stimuleren.

Anouk van der Zee

Wiskundig leren denken

Praktijkgericht onderzoek naar hoe de leerkrachten het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 kunnen stimuleren.

Bachelorthesis I
V4KV11 Deel A
Dronten, maart 2021

Anouk van der Zee
a.vanderzee@kpz.nl
Hogeschool KPZ
991128001

Thesisbegeleider: Randy Bosch

Voorwoord

Voor u ligt de bachelorthesis ‘Wiskundig leren denken’. Deze rapportage betreft een onderzoek naar leerkrachtvaardigheden die gehanteerd kunnen worden om de leerlingen uit groep 4/5 te stimuleren tot wiskundig denken. Dit onderzoek is geschreven in het kader van mijn afstuderen aan de bacheloropleiding tot Leraar Basisonderwijs aan de Hogeschool KPZ.

De afgelopen maanden stonden in het teken van onderzoek doen. Dit proces heeft mij, als onderzoeker, veel gebracht. Ik leerde hoe ik mijn twee rollen, die van de leraar en die van de onderzoeker, kon combineren in de praktijk. Ik ervoer dat het doen van onderzoek niet altijd makkelijk was. Als onderzoekende leraar moet je immers met een objectieve blik naar de eigen onderwijspraktijk kunnen kijken. Naast dat ik de complexiteit van onderzoek doen ervoer, leerde ik ook hoe ik draagvlak binnen een team kon creëren. Ik ging systematisch en transparant te werk. Het delen van resultaten en bevindingen verhoogde mijn motivatie en plezier binnen het proces van onderzoek doen. Ook was het betrekken van belanghebbenden erg waardevol voor hulp en advies.

Bij deze wil ik graag alle respondenten bedanken die mee hebben gewerkt aan dit onderzoek. In het bijzonder wil ik de leerkrachten en leerlingen uit de groepen 4/5 bedanken voor hun participatie en enthousiasme binnen het onderzoek. Daarnaast wil ik mijn Begeleider Op Afstand (BOA) bedanken voor de fijne gesprekken en adviezen binnen mijn onderzoeksthema. Dankzij jullie medewerking heb ik dit onderzoek tot een goed resultaat kunnen brengen.

Verder wil ik mijn thesisbegeleider Randy Bosch bedanken voor de begeleiding en het geven van feedback tijdens dit proces. De gestructureerde bijeenkomsten en (individuele) gesprekken hebben mij naar een hoger niveau van onderzoek doen getild. Ook mijn medestudenten verdienen hierbij een dankwoord. We stonden voor elkaar klaar. Ik vond het fijn dat ik met al mijn vragen bij jullie terecht kon. Hierdoor kon ik verder met mijn onderzoek.

Tot slot wil ik mijn ‘critical friend’ Rosalique Pouwels bedanken voor de gezellige samenwerking, het doorlezen van mijn onderzoeksrapportage en het geven van kritische feedback tijdens dit proces.

Met trots presenteer ik u het eindresultaat.

Anouk van der Zee
Dronten, 21 februari 2021

Inhoudsopgave

Voorwoord	3
Samenvatting.....	6
1. Introductie	7
1.1 Context	7
1.2 Aanleiding	7
1.3 Praktijkprobleem	8
1.4 Relevantie en actualiteit	8
1.5 Begripsverheldering	9
1.6 Onderzoeksdoel.....	10
1.7 Hoofdvraag en deelvragen.....	10
1.8 Structuur thesis	10
2. Theoretisch kader	11
2.1 Inleiding literatuurstudie	11
2.2 Literatuurstudie	11
2.3 Conclusie literatuurstudie.....	19
3. Contextonderzoek	20
3.1 Inleiding contextonderzoek	20
3.2 Methode contextonderzoek	20
3.2.1 Vaardigheden leerlingen.....	21
3.2.2 Wiskundig denken binnen de huidige situatie	22
3.2.3 Leerkrachtcompetenties.....	23
3.3 Resultaten contextonderzoek.....	25
3.3.1 Vaardigheden leerlingen.....	25
3.3.2 Wiskundig denken binnen de huidige situatie	27
3.3.3 Leerkrachtcompetenties.....	28
3.4 Conclusie contextonderzoek.....	29
4. Conclusie en discussie	30
4.1 Discussie.....	30
4.1.1 Discussiepunten	30
4.1.2 Beperkingen	30
4.1.3 Mogelijkheden vervolgonderzoek	31
4.2 Conclusie en advies.....	31
4.2.1 Eindconclusie.....	31
4.2.2 Aanbevelingen voor de praktijk.....	32
5. Ontwerpen.....	33

5.1 Uitgangspunten ontwerpen.....	33
5.2 Voorlopige doelen	34
Literatuurlijst.....	35
Bijlagen	38
Bijlage A. Verklaring gedragscode onderzoek.....	38
Bijlage B. Toestemmingsverklaring HBO-Kennisbank	39
Bijlage C. Vragenlijst leerlingen	40
Bijlage D. Werkblad leerlingen.....	41
Bijlage E. Handleiding diagnostisch gesprek.....	43
Bijlage F. Observatielijst leerkrachten	45
Bijlage G. Vragenlijst leerkrachten	46
Bijlage H. Gereedschap: formuleren van denkactiviteiten.....	49
Bijlage I. Interviewleidraad.....	50

Samenvatting

Onderwerp: het stimuleren van wiskundig denken bij leerlingen. *Onderzoeksgroep:* leerlingen en leerkrachten van groep 4/5. *Methode:* vragenlijst leerlingen, diagnostisch gesprek, vragenlijst leerkrachten, observatie en een groepsinterview. *Conclusie:* stimuleren door leerlingen ervaring op te laten doen met het werken aan probleemopgaven, inclusief het reflecteren op die ervaring. Het stellen van rijke rekenvragen doen een beroep op het wiskundig denken van leerlingen.

De maatschappij verandert en daarmee ook ons onderwijs. Het zelf kunnen nadenken en het vinden van creatieve oplossingen wordt de belangrijkste bijdrage van leerlingen aan de maatschappij van de toekomst (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015). De school binnen dit onderzoek vindt het belangrijk om leerlingen goed voor te bereiden op de toekomst. Uit vooronderzoek blijkt dat de leerkrachten veelal de oplossingsmanier aan de leerlingen toereiken. Binnen het reken-wiskundeonderwijs ervaren de leerlingen uit groep 4/5 zelden dat ze zelf een oplossingsmanier voor een probleemopgave moeten bedenken, vinden of construeren. Uit de literatuur blijkt dat deze manier van (wiskundig) denken nog onderbelicht is binnen de reguliere leermiddelen van het basisonderwijs (Van Zanten, 2020). Er moet iets veranderen, dit komt ook naar voren in het advies van het Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde (2019). Zij stellen dat wiskundige denk- en werkwijzen, als probleemoplossen en modelleren, een zichtbare plek moeten krijgen binnen het onderwijs. De onderzoeksvraag die hieruit voortvloeit en centraal staat binnen dit onderzoek luidt: ‘Hoe kunnen de middenbouwleerkrachten het wiskundig denken van leerlingen uit groep 4/5 binnen het reken-wiskundeonderwijs stimuleren?’

Een belangrijke voorwaarde om tot wiskundig denken te komen is het beschikken over algemene handvatten. In de literatuur wordt er gesproken over heuristieken (Ale & Van Schaik, 2017; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). De leerkrachten en leerlingen zijn door middel van een vragenlijst bevraagd over het aanbod en het gebruik van heuristieken. Er zijn diagnostische gesprekken gevoerd om deze vaardigheid en kennis van de leerling in beeld te krijgen. Uit het contextonderzoek komt naar voren dat de leerlingen nog te weinig kennis en vaardigheden bezitten om heuristieken te hanteren. Er is een ontwerpeis opgesteld die zich richt op het geven van instructie over het gebruik van heuristieken. Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) stellen dat de mogelijkheden om een probleemopgave aan te pakken hierdoor voor de leerling wordt uitgebreid. Uit de literatuurstudie is gebleken dat reflecteren tijdens en na afloop van het werken aan een probleem cruciaal is (Schoenfeld, 1985). Reflecteren op een probleemopgave bevat een cognitief en een metacognitief component. De metacognitieve component betreft het oplossingsproces (Kool, 2020; Pólya, 1945). Uit het contextonderzoek blijkt dat leerlingen niet tot nauwelijks evalueren op de aanpak en de eventueel gebruikte strategieën. Het stapsgewijs doorlopen van het drieslagmodel (Van Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011) moet ervoor zorgen dat leerlingen bewust gaan reflecteren op het gebruikte oplossingsproces.

Verschillende bronnen (Noteboom, 2020; Sjoers, 2018; Wolfram, 2010) geven aan dat het stellen van de juiste vraag leerlingen stimuleert tot wiskundig denken. Er zijn indirecte observaties afgenomen om de vraagstelling van de leerkrachten in beeld te krijgen. In de praktijk stellen de leerkrachten vooral lagere orde vragen. Het stellen van lagere orde vragen draagt volgens Dains (1986) niet bij aan het stimuleren van wiskundig denken. Noteboom (2020) pleit voor rijke rekenvragen binnen het reken-wiskundeonderwijs. Rijke rekenvragen doen een beroep op het wiskundig denken van de leerling en bevatten (meestal) meerdere, acceptabele antwoorden. Bij deze manier van vragen staat niet het antwoord, maar het oplossingsproces centraal. De leerkrachten geven in het groepsinterview aan dat zij behoefte hebben aan handvatten om zelf een standaardvraag om te kunnen bouwen naar een rijke rekenvraag. Deze behoefte is opgenomen binnen de eisen van het voorlopige ontwerp.

Trefwoorden: wiskundig denken, probleemoplossen, modelleren, abstraheren, horizontaal mathematiseren, verticaal mathematiseren.

1. Introductie

In dit hoofdstuk wordt de probleem- en vraagstelling ingeleid. Eerst wordt de context van de school beschreven. Vervolgens worden de volgende onderdelen gepresenteerd: aanleiding van het onderzoeksthema, praktijkprobleem, relevantie en actualiteit, begripsverheldering, hoofd- en deelvragen en het onderzoeksdoel. Tot slot wordt de structuur van de thesis weergegeven.

1.1 Context

Het onderzoek richt zich op de drie groepen 4/5 van een katholieke jenaplanschool in het midden van Nederland. Het is een middelgrote school waarbij de leerlingen verdeeld zijn over 12 stamgroepen. De school vindt het belangrijk om kinderen goed voor te bereiden op hun rol in de dynamische maatschappij. Dit wordt ook duidelijk in de visie van de scholengroep: “In ons onderwijs durf je te werken en te denken aan morgen.” Binnen de school staat de ontmoeting met jezelf, de ander en de wereld centraal. Deze uitgangspunten zijn zichtbaar in de manier van werken. Er wordt gewerkt met een ritmisch weekplan waarin de vier pijlers, samen spelen, samen spreken, samen werken en samen vieren, elkaar afwisselen. De ontmoeting met een ander vindt de gehele dag door plaats, maar krijgt een centrale plek binnen de pijler gesprek. In alle groepen is er een vaste kring aanwezig. Hier is plaats voor belangrijke, blijde en verdrietige gebeurtenissen. De dag wordt samen begonnen en afgesloten in de kring. Schoolbreed is er 's middags ruimte om te werken aan de ontmoeting met de wereld. Met Jeelo wordt er op projectmatige manier in brede zin aan de verkenning van de wereld gewerkt. Naast de ontmoeting met de ander en de wereld staat de ontmoeting met jezelf centraal. Dit wordt zichtbaar in het speerpunt van de school. De school vindt het belangrijk om kinderen te begeleiden in hun intellectuele, sociale, emotionele en expressieve ontwikkeling. Daarom is de school in januari 2021 overgestapt naar het IEP Leerlingvolgsysteem. Dit volgsysteem gaat uit van een compleet kindbeeld en geeft daarmee meer zicht in de kwaliteiten en vaardigheden van een kind. Dat het team dit nastreeft heeft alles te maken met de visie en kijk op kinderen. Om leerlingen écht goed voor te bereiden op de toekomst zijn vaardigheden als samenwerken, wiskundig probleemoplossen en het kritisch kunnen denken nodig (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015; Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde, 2019). Het team wil daarom graag weten hoe zij deze vaardigheden binnen het reken-wiskundeonderwijs kunnen stimuleren.

1.2 Aanleiding

Vorig schooljaar is het team nieuwsgierig geworden naar de mogelijkheden van rijke rekenvragen. Een stamgroepleider uit de bovenbouw deelde dit artikel met haar collega's. De essentie van het artikel gaat over de vraag: “Waarom stellen we in het rekenonderwijs vragen waarop we het antwoord al weten?” Noteboom (2020) pleit in haar artikel voor meer hogere orde vragen binnen het reken-wiskundeonderwijs. Dat deze aanpak voor het team meer betekent dan alleen het opwekken van een nieuwsgierigheid blijkt uit de studiedag van begin oktober 2020. Op deze dag heeft het team bepaald welke thema's komende twee jaar centraal staan en mogelijk door middel van onderzoek verder uitgediept gaan worden. Er zijn drie thema's gekozen, waaronder het didactisch handelen van de leerkracht. Binnen dit ontwikkelthema heerst er bij de collega's de behoefte om de praktijk op didactisch gebied te verbeteren. Waarbij nu vooral gesloten en volgend les wordt gegeven, wil het team stappen zetten naar open en interactief onderwijs waarbij het denkwerk bij de leerlingen wordt neergelegd. Dat het team dit belangrijk vindt, heeft alles te maken met de missie van de school: kinderen voorbereiden op hun rol in de dynamische maatschappij. Daarnaast bevestigen de audit-uitkomsten van oktober 2020 dat er voor deze school op didactisch gebied kansen liggen. Er is waargenomen dat de leerkrachten doorgaans lagere orde vragen stellen. Deze vragen doen een beroep op onthouden, begrijpen en (deels) toepassen. In de kwaliteitsanalyse scoort de school een voldoende op indicator OP3 - Didactisch handelen. Het verbeterpunt zit hem in het handelen van de leerkracht waarbij er hogere verwachtingen aan het denkwerk van de leerlingen gesteld mogen worden, aldus de auditor.

1.3 Praktijkprobleem

Door de inzet van verschillende technieken uit Van der Donk en Van Lanen (2020) is gebleken dat de leerkrachten de behoefte hebben om binnen het reken-wiskundeonderwijs nieuwe beroepskennis en -vaardigheden te verwerven. Leerkrachten vragen zich af hoe ze het wiskundig denken van leerlingen kunnen stimuleren. Dit blijkt uit verschillende gesprekken met directie en leerkrachten. Meerdere keren wordt het scholingstraject van didactisch coachen aangehaald. Afgelopen twee jaar heeft het team succesvol de opleiding didactisch coachen afgerond. Er wordt geconcludeerd dat de leerkrachten in staat zijn om de leerlingen op pedagogisch gebied in de juiste denkstand te krijgen. Binnen de didactische kant van het onderwijs lukt dit de meeste leerkrachten (nog) niet. Een gewenste situatie zou zijn als de leerkrachten hun handelingsrepertoire (kennis, vaardigheden, attitude) vergroten, zodat ze de leerlingen kunnen stimuleren tot wiskundig denken.

De leerlingen uit groep 4/5 worden binnen het reken-wiskundeonderwijs weinig gestimuleerd om zelf een oplossingsmanier te vinden of te construeren bij een opgave. In de praktijk reiken de leerkrachten veelal het oplossingsproces aan. Daarnaast wordt in gesprekken met leerlingen duidelijk dat de oplossingsmanier van de leerkracht leidend is. Deze ervaring is opgedaan naar aanleiding van een kringgesprek over 'denkvierkanten' in groep 4/5. Bij een 'denkvierkant' bedenken de leerlingen zelf welke afbeelding er niet bij hoort. Na dit gesprek luidde vanuit de klas de vraag: "Maar juf welk vierkant hoort er nou niet bij?" De meerderheid van de leerlingen was verbaasd dat een opgave meerdere, acceptabele antwoorden kan hebben. Om het wiskundig denken bij leerlingen te stimuleren zouden we volgens Kool (2020) het accent in onze lessen moeten leggen op het construeren, vergelijken en evalueren van oplossingsmanieren en minder op het geven van goede antwoorden.

1.4 Relevantie en actualiteit

Volgens Bruin-Muurling en Verschoor (2015) wordt de belangrijkste bijdrage van leerlingen aan de maatschappij van de toekomst het oplossen van problemen en het genereren van nieuwe ideeën. Dit komt volgens Terlouw (2015) door de snelle ontwikkelingen binnen de informatietechnologie. Computers nemen steeds meer routinematige taken over. Daardoor ontstaat er een verschuiving van werkzaamheden. De maatschappij blijft leerlingen in de toekomst echter nodig hebben. Zij gaan een belangrijke bijdrage leveren in het uitvoeren van niet-routinematige werkzaamheden. Hier zijn vaardigheden, als het genereren van nieuwe ideeën, uitvoeren van analytische taken en het oplossen van problemen, voor nodig (Van Zanten, 2017). Het is dus van essentieel belang dat deze vaardigheden een (zichtbare) plek gaan krijgen in het onderwijs. Zeker nu Curriculum.nu de contouren heeft geschetst voor een nieuw curriculum. Op negen leergebieden zijn er voorstellen gedaan om het curriculum te actualiseren. Bij Rekenen & Wiskunde blijven leerlingen een stevig fundament nodig hebben, zoals vakkennis, geautomatiseerde basisvaardigheden en memoriseerde basiskennis. Naast deze basis worden denk- en werkwijzen, zoals wiskundig probleemoplossen en logisch redeneren steeds belangrijker (Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde, 2019).

Van den Bergh (2018) benadrukt in zijn college het maatschappelijke belang van gecijferheid. Ook in de maatschappij van de toekomst blijf je de gecijferdheidsdimensie van wiskunde nodig hebben. Zoals hijzelf mooi verwoordde: "Dit heb je nodig om zaken te kunnen controleren of zelf de regie in handen te kunnen houden. Ongecijferde mensen zijn eenvoudig om de tuin te leiden, bijvoorbeeld bij financiële aanbiedingen en kansspelen" (Van den Bergh, 2018, p. 11).

Op dit moment is het wiskundig denken nog onderbelicht in de reguliere leermiddelen binnen het basisonderwijs. De meeste leerlingen zijn gewend dat de oplossingsmanier van een opgave wordt aangereikt of in hun geheugen beschikbaar is. Het zelf moeten zoeken, vinden of construeren, ervaren leerlingen zelden (Van Zanten, 2020). Reden genoeg voor een ontwerpgericht onderzoek waarbij gekeken wordt hoe het wiskundig denken op de basisschool gestimuleerd kan worden, zodat we alle leerlingen goed voorbereiden op hun rol in de dynamische maatschappij.

1.5 Begripsverheldering

In dit onderzoek komen een aantal begrippen aan bod, die van belang zijn binnen de rapportage. Deze begrippen worden verhelderd, zodat iedereen ze op dezelfde wijze kan interpreteren.

➤ *Wiskundig denken*

Binnen het onderzoek wordt de beschrijving van Van Zanten (2020) gehanteerd. Hij stelt dat de leerling bij een probleemopgave zelf een oplossingsmanier moet kunnen bedenken, vinden of construeren. Deze beschrijving kent veel overeenkomsten met de definitie van Drijvers (2015a). Hij ziet probleemoplossen, modelleren en abstraheren als de drie kernaspecten van wiskundig denken. Om tot deze aspecten te komen, moet de leerling enkele vaardigheden bezitten. Zo moet de leerling heuristieken kunnen hanteren (Ale & Van Schaik, 2017; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019), de basisvoorwaarden van de leerlijn probleemoplossend denken en handelen beheersen (Drijvers, 2015a; SLO, 2020) en moet de leerling in staat zijn om zijn oplossingsproces te reflecteren (Kool, 2020; Schoenfeld, 1985).

➤ *Probleemoplossen*

Volgens Drijvers (2015a) is probleemoplossen het eerste kernaspect van wiskundig denken. Binnen het probleemoplossen wordt de leerling geconfronteerd met een probleemopgave waar hij nog geen standaard oplossingsstrategie voor heeft (Müller, 2020; Pólya, 1945). Probleemoplossen kent een relatief karakter. Waarbij de ene leerling geconfronteerd zal worden met een probleem dat niet direct oplosbaar is, zal het voor de andere leerling een routinematige reproductie zijn (Drijvers, 2018).

➤ *Modelleren*

Het tweede kernaspect binnen het wiskundig denken is het modelleren (Drijvers, 2015a). Hierbij draait het volgens Van Zanten (2011) om de vaardigheid om het probleem te formuleren in een wiskundige bewerking. Treffers (1987) noemt dit heen- en terugvertalen horizontaal mathematiseren.

➤ *Abstraheren*

Het laatste hoekpunt wordt door Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde (2019) beschreven als de vaardigheid om overeenkomsten en verschillen uit een concrete probleemsituatie te halen. Met als doel het creëren van een nieuwe betekenisvolle werkelijkheid op een hoger niveau (Drijvers, 2018). Abstraheren is hierdoor nauw verwant met wat Treffers (1987) verticaal mathematiseren noemt.

➤ *Horizontaal mathematiseren*

De vaardigheid om vanuit een probleem tot een bewerking te komen (Gerrits & Logtenberg, 2015; Treffers, 1987). Ook het terugredeneren binnen een opgave valt volgens Van Zanten (2011) onder horizontaal mathematiseren.

➤ *Verticaal mathematiseren*

Bij verticaal mathematiseren vergelijkt en evalueert de leerling verschillende oplossingsmanieren. Hierdoor leert de leerling uiteindelijk verkorten. Van Zanten (2011) vat verticaal mathematiseren samen als het proces van uitbreiden en op een steeds hoger niveau van wiskundige kennis en vaardigheden komen.

1.6 Onderzoeksdoel

In dit onderzoek zal gekeken worden naar hoe de leerkrachten het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 kunnen stimuleren. Het doel van dit onderzoek is om leerkrachten handvatten te geven waarmee zij de leerlingen kunnen stimuleren tot wiskundig denken.

1.7 Hoofdvraag en deelvragen

Binnen het onderzoek wordt antwoord gegeven op de volgende hoofdvraag:

Hoe kunnen de middenbouwleerkrachten het wiskundig denken van leerlingen uit groep 4/5 binnen het reken-wiskundeonderwijs stimuleren?

Vervolgens wordt de hoofdvraag opgesplitst in de volgende deelvragen, zie Tabel 1. Per deelvraag is beschreven met behulp van welke kennis de vraag onderzocht wordt.

Tabel 1
Deelvragen praktijkgericht onderzoek

1 Wat wordt er verstaan onder het begrip wiskundig denken?	Generieke kennis
2 Welke vaardigheden heeft een leerling uit groep 4/5 nodig om tot wiskundig denken te komen?	Generieke kennis
3 Waar moeten reken-wiskundeactiviteiten aan voldoen om het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 te stimuleren?	Generieke kennis
4 Op welke wijze kan de leerkracht het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 begeleiden?	Generieke kennis
5 In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?	Contextkennis
6 In hoeverre worden de leerlingen uit groep 4/5 door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?	Contextkennis
7 Wat hebben de leerkrachten uit groep 4/5 nodig om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken?	Contextkennis

1.8 Structuur thesis

Na deze introductie van het onderzoek zal het theoretisch kader te lezen zijn. Het theoretisch kader omvat de literatuurstudie die gedaan is naar de generieke deelvragen. In Tabel 1 zijn deze vragen weergegeven. Daarna volgt het contextonderzoek. Binnen dit hoofdstuk worden de methoden van dataverzameling weergegeven. Ook worden de resultaten en conclusie van het contextonderzoek gepresenteerd. Vervolgens is de conclusie en discussie te lezen. Het onderzoek wordt afgesloten met het beschrijven van ontwerpeisen en de voorlopige doelen van het uiteindelijke ontwerp. Tot slot zijn de literatuurlijst en bijlagen toegevoegd.

2. Theoretisch kader

In dit hoofdstuk is de literatuurstudie over wiskundig denken opgenomen. Eerst worden de deelvragen die leiden tot generieke kennis beschreven. Vervolgens zal de generieke kennis gepresenteerd worden. Tot slot volgt er een conclusie van de theoretische verdieping.

2.1 Inleiding literatuurstudie

Binnen het theoretisch kader wordt er ingegaan op de volgende generieke deelvragen:

1. Wat wordt er verstaan onder het begrip wiskundig denken?
2. Welke vaardigheden heeft een leerling uit groep 4/5 nodig om tot wiskundig denken te komen?
3. Waar moeten reken-wiskundeactiviteiten aan voldoen om het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 te stimuleren?
4. Op welke wijze kan de leerkracht het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 begeleiden?

2.2 Literatuurstudie

Wiskundig denken

In de reken-wiskundeles wordt er door de leerlingen nagedacht, maar daarbij gaat het volgens Van Zanten (2020) niet altijd om wiskundig denken. In de literatuur vinden we verschillende definities van wiskundig denken. Devlin (2011, in Bor-de Vries & Drijvers, 2015) schrijft dat wiskundig denken gaat over het begrijpen van de logica achter de wiskunde. Bij deze manier van denken staat het analyseren van onderliggende patronen centraal. Schoenfeld (1992) zegt het weer anders en richt zich op de twee kernaspecten van wiskundig denken. Ten eerste het ontwikkelen van een wiskundige kijk op dingen en ten tweede het ontwikkelen en gebruiken van wiskundig gereedschap met als doel de structuur te begrijpen. Deze opvattingen zijn volgens Drijvers (2015a, p. 5) niet eenduidig en daarom ontwikkelde hij een werkdefinitie. Hij zegt: “Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken”. Het gereedschap kan iets concreets zijn, maar omvat ook theoretisch-methodisch gereedschap zoals logisch redeneren en bewijzen. Daarnaast is het probleem geen standaardopgave. Verschillende bronnen (Drijvers, 2015a; Müller, 2020; Pólya, 1945; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019) geven aan dat het gaat om situaties waarvoor de leerling (nog) geen standaardaanpak paraat heeft. Pólya (1945) pleitte dat het oplossen van zulke problemen centraal moet staan in de wiskundeles. Keijzer en Verbruggen (2020) schrijven dat wiskundig denken gezien moet worden als een van de belangrijkste doelen binnen het rekenwiskunde-onderwijs. Meerdere wiskundigen betogen deze visie. Van Streun (2001, p. 17) ziet het doel van rekenwiskunde-onderwijs als: “Weten dat, weten hoe, weten waarom en weten over weten”. Drijvers (2015a) stelt dat binnen het ‘weten hoe’ en het ‘weten waarom’ het wiskundig denken centraal staat. Deze doelen stijgen immers uit boven het oplossen van routinematige taken.

Van den Bergh (2018) kent twee wiskundige dimensies aan het oplossen van een wiskundig probleem toe. In de eerste plaats een wetenschappelijke dimensie. Wiskundige problemen geven aanleiding tot experimenteren, het opstellen van hypothesen, verzamelen van gegevens, trekken van conclusies en het generaliseren van resultaten. Deze dimensie kent wel een relatieve kant. Waarbij de ene leerling geconfronteerd zal worden met een probleem dat niet direct oplosbaar is, zal het voor de andere leerling een routinematige reproductie zijn. Dit alles hangt af van de vaardigheid, de voorkennis en de belangstelling van de leerling (Drijvers, 2018). Ten tweede kent Van den Bergh (2018) een ontspanningsdimensie aan wiskundige problemen toe: puzzels en spelletjes zijn voor leerlingen interessant en kunnen ontspannend werken.

De definitie van Drijvers (2015a) kent overeenkomsten met de beschrijving van Van Zanten (2020). Hij beschrijft wiskundig denken als een vaardigheid die te allen tijde productief en creatief van aard is. Daarmee wordt bedoeld dat de wiskundige denkhandelingen niet worden aangereikt, maar zelf worden bedacht. Bij wiskundig denken wordt er een onderscheid gemaakt tussen drie kernaspecten.

Drijvers (2015a) ziet modelleren, probleemoplossen en abstraheren als de drie centrale hoekpunten van wiskundig denken. Om tot wiskundig denken te komen, zijn daarnaast ook ondersteunende vaardigheden nodig. In Afbeelding 1 is te zien dat het hierbij gaat om redeneren, structureren en manipuleren.



Afbeelding 1. Drie centrale 'hoekpunten' van wiskundig denken. Overgenomen uit *Kernaspecten van wiskundig denken* door P. Drijvers, 2015a (<https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/Kernaspecten-van-wiskundig-denken-dr.-P.H.M.-Drijvers.pdf>). Copyright 2015, NRO.

Modelleren

Binnen het modelleren stelt Müller (2020) dat het hierbij draait om het beschrijven van de werkelijkheid met wiskunde (en rekenen). Treffers (1987) en Van Zanten (2011) vergelijken modelleren met het proces van horizontaal mathematiseren, het probleem formuleren in een (wiskundige) bewerking. Door het maken van een schets of door het opstellen van formules en vergelijkingen wordt de situatie wiskundig aangepakt. Volgens Drijvers (2015b) kan de leerling het wiskundige probleem dan beter leren begrijpen.

Abstraheren

Bij abstraheren gaat het om het isoleren van specifieke overeenkomsten en verschillen uit de probleemsituatie, zodat deze als nieuwe, opzichzelfstaande denkobjecten kunnen worden beschouwd (Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde, 2019). Zo leert de leerling het creëren van een nieuwe betekenisvolle werkelijkheid op een hoger niveau. Drijvers (2018) stelt dat dit proces van decontextualiseren nauw verwant is met wat Treffers (1987) verticaal mathematiseren noemt.

Probleemoplossen

Binnen de kern van wiskunde draait het om het oplossen van problemen, die voor de leerling niet standaard zijn. Bij wiskundig probleemoplossen wordt de leerling geconfronteerd met een vraagstuk waar hij geen standaardoplossingsstrategie voor heeft (Müller, 2020). De leerling gaat opzoek naar een manier waarop hij dit vraagstuk kan aanpakken. Daarvoor moet hij probleemoplossende vaardigheden ontwikkelen. Drijvers (2015a) ziet probleemoplossende vaardigheden als weten hoe je een probleem kunt aanpakken, maar ook het vermogen om een manier creatief in te kunnen zetten bij een nieuwe situatie. Hij pleit voor de volgende manieren bij het aanpakken van een probleem: een schets maken, iets afleiden uit de gegevens of terugredeneren vanuit de gewenste uitkomst.

Probleemopgaven

Om de probleemoplossende vaardigheden van de leerling te stimuleren, is het volgens verschillende bronnen (Schoenfeld, 1985; Terlouw, 2015; Van Zanten, 2019) nodig om leerlingen regelmatig te laten werken aan probleemopgaven. Bij een probleemopgave draait het om het beredeneren en het zelf kunnen achterhalen van de oplossingswijze. Wiskundige probleemopgaven kunnen verdeeld worden in twee groepen: *problems to find* en *problems to solve* (Pólya, 1945). Op de basisschool gaat het volgens Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2018) om *problems to find* en die bestaan uit drie elementen: de onbekende die moet worden gevonden, de informatie die is gegeven en de conditie(s) waaraan moet worden voldaan. Jonassen en Hung (2008) stellen dat hoe meer er van deze voorwaarden in een opgave vervuld moeten worden, hoe meer de complexiteit ervan toeneemt.

Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) hebben beslisregels opgesteld om te bepalen of een opgave geclassificeerd kan worden als probleemopgave, een rechttoe-rechtaan oplosbare opgave of als *gray area* opgave. Een *gray area* opgave kan gezien worden als een opgave ertussenin. Dit betekent dat de opgave niet routinematig oplosbaar is, maar ook dat het niet volledig geclassificeerd kan worden als een probleemopgave. Om te weten wat een probleemopgave is, kan er gebruik worden gemaakt van de beslisregels. Deze regels zijn opgesteld uit een aantal kenmerken. Ten eerste moet het onbekende voldoen aan drie of meer condities. Een voorbeeld van een mogelijke conditie is het gegeven wat de som van de getallen is. Ten tweede moeten de gegevens onderling afhankelijk zijn. Hierdoor kan het onbekende binnen de opgave gevonden worden. Het laatste kenmerk gaat over de volgorde van oplossen. De informatie die gegeven is, wordt in een andere volgorde gepresenteerd dan nodig is om de opgave op te lossen. Als beslisregel hanteren Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) het volgende uitgangspunt: voldoet een opgave aan geen enkel kenmerk dan wordt de opgave geclassificeerd als rechttoe-rechtaan oplosbare opgave. Bij één overeenkomstig kenmerk is er sprake van een *gray area* opgave. Wanneer een opgave twee of alle drie van deze kenmerken heeft, wordt deze opgave geclassificeerd als niet-routinematige probleemopgave. Dit is echter wel relatief. Zoals Drijvers (2015a, p. 5) al zei: “Wat voor de ene leerling uitdagend en nieuw is, is voor de andere routinematige reproductie”.

De kunst is om iedere leerling uit te dagen. Van Zanten (2019) heeft daarom kenmerken opgesteld om de geschiktheid van een probleemachtige opgave voor alle leerlingen te beoordelen. Dit wordt gedaan aan de hand van de volgende drie kenmerken:

1. Het aantal gegevens in de opgave en condities aan de oplossing zijn beperkt.
2. Het moet voor iedereen mogelijk zijn om een begin te maken met het oplossen. Dat kan bijvoorbeeld via de *guess and check* aanpak, het doen van een beredeneerde gok.
3. Er zijn verschillende manieren mogelijk om tot een correcte oplossing te komen.

Van Zanten (2019) schrijft dat de volgende typen puzzelachtige opgaven geschikt zijn voor alle leerlingen: ‘welke hoort er niet bij?’, ‘tweelingpuzzels’, ‘kenken-puzzels’ en ‘vind de opgave’. Bij deze opgaven staat het onder woorden brengen van redenties en oplossingen centraal. Het verwoorden ondersteunt hierbij het denkproces en stimuleert daarmee het wiskundig denken.

Vaardigheden leerling

Het oplossen van probleemopgaven vereist andere vaardigheden van een leerling dan bij het denken over een routinematige opgave. Bij het oplossen van een probleemopgave zijn er algemene probleemaanpakken nodig. Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019, p. 25) spreken hierbij over een heuristiek: “handvatten om probleemopgaven aan te pakken, zonder dat zij het eigen denkwerk van de leerlingen in de weg zitten”. Binnen het reken-wiskundeonderwijs zie je dit terug in het maken van een tekening, het doen van een beredeneerde gok of het terugredeneren binnen een opgave (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009). Deze heuristieken zijn nodig bij het aanpakken van probleemopgaven (Ale & Van Schaik, 2017). De vaardigheid om een heuristiek te

hanteren leert een leerling niet vanzelf. De leerling heeft baat bij een instructie die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken (Van Zanten & Van Van den Heuvel-Panhuizen, 2019). Net zoals bij alle andere rekenvaardigheden heeft dit tijd en oefening nodig (Kool, 2020). Wiskundig probleemoplossen leer je immers niet vanzelf. Van Zanten (2020) pleit daarom voor ‘ervaring’. Hij stelt dat het nodig is om leerlingen ervaringen op te laten doen met probleemoplossen. Om alle leerlingen te laten oefenen met probleemopgaven, ongeacht vaardigheid, voorkennis en interesse, verwijst hij naar de drie kenmerken om een probleemachtige opgave te beoordelen (Van Zanten, 2019). Naast het aanleren en beoefenen van heuristieken moet de leerling volgens Drijvers (2015a) beschikken over enkele probleemoplossende vaardigheden. SLO (2020) stelt dat het hierbij gaat om het vermogen om een probleem(opgave) te (h)erkennen en tot een plan te komen om het probleem uiteindelijk op te lossen. De basisvoorwaarden voor een leerling uit de middenbouw om tot probleemoplossend denken en handelen te komen, worden weergegeven in Tabel 2:

Tabel 2

Leerinhouden probleemoplossend denken en handelen

Leerinhoud	Indicator
De leerling signaleert, onderkent een probleem of vraag.	- Het signaleren van opvallende dingen of gedragingen en stelt vragen. - Het (h)erkennen een probleem.
De leerling beschikt over procedurele kennis van probleemoplosprocessen.	- Hij lost al doende problemen op. - Hij praat met anderen over hoe je een probleem kunt oplossen.
De leerling zoekt, bedenkt of selecteert een oplossing voor het probleem.	- Hij (onder)zoekt oplossingen associatief en vanuit fantasie. - Hij verwoordt een oplossing. - Hij bespreekt wat nodig is voor het uitvoeren van de oplossing.

Aangepast overgenomen uit *Leerlijn probleemoplossend denken en handelen* van SLO, 2020

(https://www.slo.nl/publish/pages/10751/leerlijn_probleemoplossend_denken_handelen_maart_2020.pdf). Copyright 2020, SLO.

Deze voorwaarden, weergegevens als indicator, zijn gebaseerd op de leerlijn probleemoplossend denken en handelen (SLO, 2020). Tijdens en na afloop van het werken aan het probleem is reflecteren volgens Schoenfeld (1985) van cruciaal belang. Met reflecteren wordt in dit geval het heroverwegen, monitoren en evalueren van reken-wiskundewerk bedoeld. Ook het integreren van nieuwe kennis in bestaande kennis staat hierbij centraal (Van Streun, 2001). Kool (2020) maakt bij het reflecteren op probleemopgaven een onderscheid tussen cognitief en metacognitief reflecteren. De cognitieve component van rekenwiskundeproblemen bevat zowel horizontaal als verticaal mathematiseren. Met behulp van Afbeelding 2 worden de verschillende manieren van mathematiseren, oftewel ‘verwiskundigen’ (Van Zanten, 2011) duidelijk gemaakt.

Ik koop 7 vellen.



De som is:

..... X

Ik heb stickers.

Afbeelding 2. Opgave uit Alles Telt Q. Overgenomen uit het *maatwerkschrift blok 3 groep 5*. Copyright 2018, ThiemeMeulenhoff.

Bij horizontaal mathematiseren gaat het om de vaardigheid om vanuit een probleem tot een bewerking te komen (Gerrits & Logtenberg, 2015). In de situatie met stickers uit Afbeelding 2 is de vermenigvuldiging 7×12 te herkennen. Treffers (1978) stelt dat het hierbij gaat om het decontextualiseren van een opgave. Ook terugredeneren valt onder horizontaal mathematiseren (Van Zanten, 2011). $7 \times 12 = 84$, dus dit zijn samen 84 stickers. Bij verticaal mathematiseren speelt procedurele kennis een rol. Procedurele kennis richt zich op de oplossingsstrategie (Ale & Van Schaik, 2017). Bijvoorbeeld door 7×12 eerst uit te rekenen door herhaald optellen en later $7 \times 10 + 7 \times 2$ uit te rekenen. Bij verticaal mathematiseren vergelijkt en evalueert de leerling verschillende oplossingsmanieren. Hierdoor leert de leerling uiteindelijk verkorten, zoals het splitsend vermenigvuldigen in Afbeelding 2. Van Zanten (2011) vat verticaal mathematiseren samen als het proces van uitbreiden en op een steeds hoger niveau van wiskundige kennis en vaardigheden komen.

Naast deze cognitieve component bevat reflecteren op rekenwiskundeproblemen ook een metacognitieve kant. Metacognitief reflecteren betreft het oplossingsproces. De leerling weet welke vaardigheden en/of heuristieken hij kan gebruiken en hoe hij de oplossing kan controleren. Om cognitief en metacognitief te reflecteren tijdens en na afloop van het werken aan een niet-routinematige opgave kan het stappenplan van Pólya (1945) gehanteerd worden. Pólya beschreef de volgende vier stappen: de leerling richt zich eerst op het begrijpen van een probleem. Het probleem wordt in eigen woorden geformuleerd of schematisch gevisualiseerd. Vervolgens wordt er een probleemaanpak opgesteld. Er worden strategieën en heuristieken geselecteerd. Nadat er een aanpak is opgesteld, gaat de leerling deze aanpak uitvoeren. Hier staan rekenvaardigheden, logisch redeneren en het proces van verticaal mathematiseren centraal. Tenslotte controleert en interpreteert de leerling het antwoord. Van Streun (2001) stelt dat voor het ontwikkelen van probleemoplossend vermogen het van belang is dat de verschillende stappen bewust en expliciet worden gebruikt.

Dit reflecteren vereist volgens De Goeij en Oonk (2017) een wiskundige attitude. Als we een probleemoplossende, wiskundige attitude bij leerlingen willen ontwikkelen, moet de leerkracht deze zelf voorleven. Kool (2020) schrijft dat de huidige generatie leerkrachten waarschijnlijk nooit de kans hebben gekregen om deze attitude te ontwikkelen. Het traditionele rekenen was destijds gericht op het geven van goede antwoorden. Om leerlingen probleemoplossend te laten denken, is de focus op het construeren, vergelijken en evalueren van oplossingsprocessen nodig. Hiervoor is een algemene houding ten aanzien van wiskunde nodig. Binnen deze wiskundige attitude staat zelfvertrouwen tonen centraal. Ook kenmerken als plezier hebben in het maken van wiskundige opgaven, verwondering, doorzettingsvermogen laten zien en verantwoordelijkheidsgevoel spelen hierbij een rol. Deze kenmerken van De Goeij en Oonk (2017) kennen veel overeenkomsten met de *mathematical mindset* van Jo Boaler. Zij ziet reken-wiskunde als een creatief, visueel, verbonden en levend onderwerp. Boaler (2016) is ervan overtuigd dat iedereen kan rekenen op het hoogste niveau, mits je maar in jezelf gelooft. Boaler (2016) verwijst hierbij naar de reeks boeken van de wiskundige Devlin. Hij stelt dat ieder kind nieuwsgierig is naar onderliggende patronen. Geef peuters bijvoorbeeld een set blokken. Ze zullen met plezier een patroon maken van gekleurde blokken. Zodra kinderen reken-wiskundeles krijgen, vervaagt deze nieuwsgierigheid en wordt dit vervangen door sterke overtuigingen dat reken-wiskunde alles te maken heeft met het opvolgen van regels en het geven van goede antwoorden (Boaler, 2016). Boaler (2016) haalt het onderzoek van de Britse onderzoekers Gray en Tall (1994) aan. In dit onderzoek wordt duidelijk dat succesvolle rekenaars de wiskunde benaderen met een *mathematical mindset*. Zij zoeken naar patronen, inzicht en durven flexibel met cijfers om te gaan. Dit in tegenstelling tot de zwakkere rekenaars. Zij gebruikten geen gevoel voor cijfers en gingen aan de slag met een aangeleerde standaardmethode. De opgave 21-6 werd door de zwakkere rekenaars aangepakt door terug te tellen vanaf 21. De succesvolle rekenaars veranderden de opgave naar 20-5. Een eenvoudigere bewerking. Boaler (2016) pleit daarom voor reken-wiskundeonderwijs vanuit een *mathematical mindset*. Zulk onderwijs moedigt kinderen aan, gaat uit van vertrouwen en waardeert de worsteling en het maken van fouten.

Tegengeluiden

Toch is er ook veel kritiek op de onderzoeken van Boaler. Veel van haar onderzoeken krijgen de stempel ‘frauduleus’. Volgens Beter Onderwijs Nederland (2017) zijn veel van haar statistische onderzoeksmiddelen niet goed opgezet, kloppen haar conclusies niet en maakt ze zich onder andere schuldig aan misleidende data-manipulatie. Ook *Mathematical Mindsets* in samenwerking met collega Dweck krijgt (veel) kritiek. Zo blijken de conclusies van zowel Dweck als Boaler niet significant te zijn; de rapporten bevatten vooral zelf-referenties. Daarnaast worden er door Sisk et al. (2018, in Kirschner, Claessens & Raaijmakers, 2018) vraagtekens geplaatst bij de betrouwbaarheid van de mindset-studies van Dweck. “Latere studies laten namelijk andere resultaten zien, onder meer dat een op groei gerichte denkwijze niet leidt tot beter leren” (p. 55).

Wiskundig denken stimuleren

Wiskundig leren denken leer je volgens verschillende bronnen (Drijvers, 2018; Janson, 2017; Van Zanten, 2020) niet vanzelf. Wolfram, een bekende wiskundige, (2010) wijst op vier stappen die volgens hem nodig zijn om leerlingen wiskundig te leren denken:

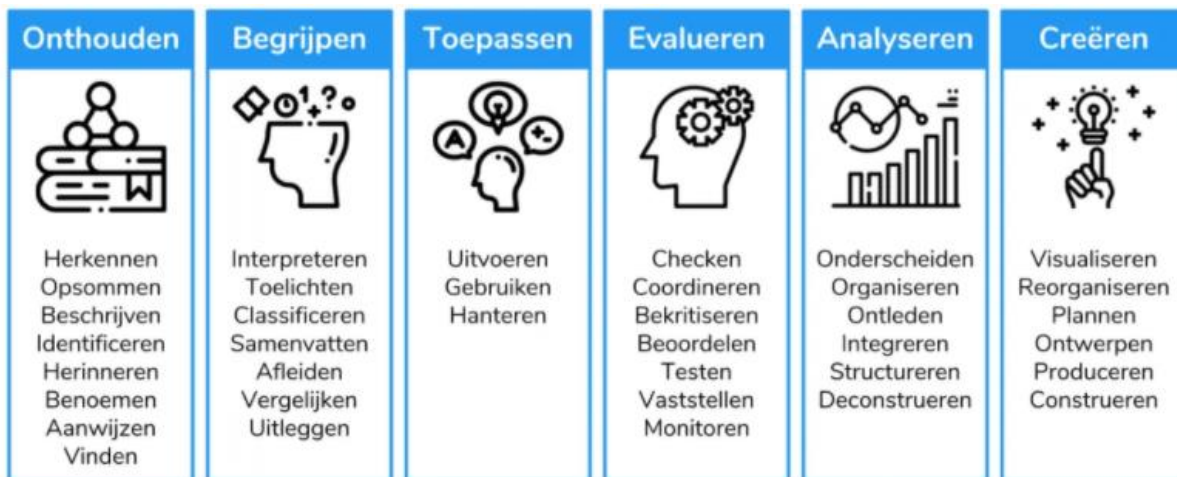
1. Stel de juiste vraag
2. Vertaal die vragen naar een wiskundige formulering
3. Werk de wiskundige beweringen uit
4. Vertaal de uitkomst naar de gestelde vraag

Volgens Wolfram (2010) besteden we binnen het reken-wiskundeonderwijs alle tijd aan het (uit)rekenwerk, terwijl dat de enige stap is die mogelijk door computers vervangen gaat worden. Om wiskundig denken bij leerlingen te stimuleren, zouden we moeten beginnen met het stellen van de juiste vraag (Noteboom, 2020; Sjoers, 2018; Wolfram, 2010). Het stellen van lagere orde vragen, zoals vragen gericht op het reproduceren van feiten en procedures, draagt volgens Dains (1986) niet bij aan het stimuleren van wiskundig denken bij leerlingen. Hiervoor zijn hogere orde vragen nodig, zoals open vragen die gericht zijn op wiskundig probleemoplossen, abstraheren en redeneren. Om leerlingen tot deze brede vaardigheden te laten komen, is het stellen van de juiste vragen essentieel. Noteboom (2020) pleit hierbij voor rijke rekenvragen.

Rijke rekenvragen zijn vragen die een beroep doen op het wiskundig denken van leerlingen. Leerlingen hebben hiervoor probleemoplossende vaardigheden en procedurele kennis nodig. Daarnaast bevatten rijke rekenvragen (meestal) meerdere acceptabele antwoorden. Wanneer er maar één goed antwoord mogelijk is, verwijst dit vaak naar een vraag die gericht is op het reproduceren van feiten. Bijvoorbeeld de opgave ‘ $4 \times 6 =$ ’. Als we deze vraag omdraaien en vragen: “Ik weet dat de uitkomst van een vermenigvuldiging 24 is, wat kan de opgave dan zijn?”, dan zijn er veel meer antwoorden en redeneringen mogelijk. Het volgen van redeneringen sluit aan bij het derde kenmerk van rijke rekenvragen. Volgens Noteboom (2020) leert men tijdens het proces van oplossen, puzzelen en redeneren ook nieuwe vaardigheden. Leerlingen ontdekken structuren, patronen en zien dat andere leerlingen weer andere oplossingen hebben. Dit zet leerlingen aan het denken. Al deze informatie geeft de leerkracht meer inzicht op het leerproces van de leerlingen.

Er zijn twee methoden waarmee men in de praktijk rijke rekenvragen kan bedenken. De eerste methode is van achter naar voren werken en bestaat uit een aantal stappen. Binnen deze methode draait het om het bedenken van een gesloten vraag. Dit antwoord vormt vervolgens de kern van de rijke rekenvraag. Leerlingen gaan opzoek naar de verschillende mogelijkheden die tot hetzelfde antwoord leiden. Een tweede manier is het ombouwen van de standaardvragen naar een rijke rekenvraag. De standaardvraag is vaak een gesloten vraag. Door er een open vraag van te maken, daag je volgens Noteboom en Verbeeck (2020) leerlingen uit tot nadenken, redeneren en creatief denken. Sjoers (2018) spreekt over denkactiviteiten. Dit zijn uitdagende rekenvragen waarbij er gebruik wordt gemaakt van de Taxonomie van Bloom (1956, herzien in 2001). De Taxonomie van

Bloom wordt onderverdeeld in zes niveaus: onthouden, begrijpen, toepassen, analyseren, evalueren en creëren. De eerste drie vaardigheden, onthouden, begrijpen en toepassen, worden de lagere orde denkvaardigheden genoemd. Hogere orde denkvaardigheden, evalueren, analyseren en creëren, bevorderen volgens Noteboom (2020) en Sjoers (2018) het wiskundig denken bij de leerling. Echter zijn er volgens Lucassen (2018) veel misconcepten over de Taxonomie van Bloom. Brouwer en Ahlers (2011) stellen dat leerlingen een trede moeten ‘beheersen’ om naar de volgende trede te kunnen gaan. Lucassen (2018) legt uit dat de er geen hiërarchie in het instrument zit. Uit onderzoek (Anderson & Krathwohl, 2001) blijkt dat de vaardigheden ook naast elkaar of in andere volgorde aangeleerd kunnen worden. Bloom zou daarnaast volgens Lucassen (2018) nooit de bedoeling hebben gehad om een rangorde in het model aan te brengen. In Afbeelding 3 presenteert Lucassen (2018) de ‘nieuwe Bloom’ waarbij de verschillende onderdelen naast elkaar gepresenteerd worden.



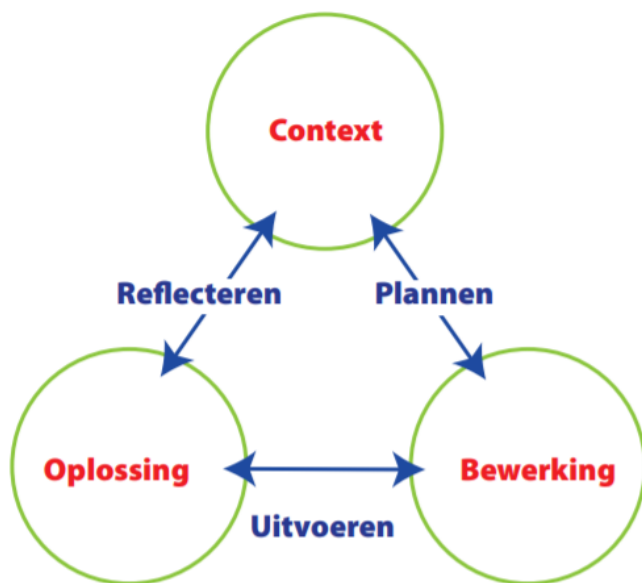
Afbeelding 3. De ‘nieuwe Bloom’ Overgenomen uit *De Taxonomie van Bloom: inhoudelijk goed, maar vaak fout gebruikt* door M. Lucassen, 2018 (<https://www.vernieuwenderwijs.nl/de-taxonomie-van-bloom-vaak-verkeerd-gebruikt-maar-zo-werkt-het-wel/>). Copyright 2018, Lucassen.

Wiskundig denken begeleiden

Van den Boogaard en Smoors (2015) stellen dat het begeleiden van probleemoplossend vermogen bij leerlingen essentieel is binnen de ontwikkeling van het wiskundig denken. Volgens Camilli, Vargas, Ryan en Barnet (2010, in NRO, 2017) is directe instructie een van de meest effectieve vormen van instructie. Veel bewijsmateriaal voor de effectiviteit van directe instructie is gevonden in het grootschalige Amerikaanse onderzoek *Follow Through*. Dit project vergeleek tussen 1967 en 1977 verschillende onderwijsaanpakken en kwam tot de conclusie dat alleen directe instructie een zeer krachtig didactisch aanpak is. Deze conclusie blijkt ook uit de meta-analyses van Hattie. Hij (2014, in Schmeier, 2017) stelt dat directe instructie in de rekenles superieur is aan ontdekkende aanpakken.

Directe instructie is volgens Buter en Mulder (2017) alleen binnen de fase van procedureontwikkeling een goede instructievorm. Zoals Janson (2014, p. 127) zegt: “Onze huidige en zeker de toekomstige samenleving vraagt niet om mensen die goed kunnen nadoen wat hen is voorgedaan. Daar hebben we in toenemende mate robots voor. Wat wel nodig is, zijn mensen die zelf kunnen en durven denken”. Van Boxel (2019) pleit voor een genuanceerde kijk op het drieslagmodel, met als doel leerlingen zelfstandig leren nadenken. Het drieslagmodel is een model voor probleemoplossend handelen (Van Groenestijn, Borghouts, & Janssen, 2011). Ook Bruin-Muurling en Verschoor (2015) halen het drieslagmodel aan. Zij schrijven dat de leerling ondersteund moet worden tijdens het aanpakken van een probleemopgave. Door de leerling te ondersteunen op probleemaanpak in plaats van op de snelste route naar een antwoord, krijgt de leerling de kans zelf te gaan leren. Bruin-Muurling en Verschoor (2015) zien het drieslagmodel als een effectief model om deze ondersteuning te bieden.

Het model bestaat uit drie vaste stappen: van context naar bewerking, vanuit daar naar oplossing en tot slot van de oplossing terug naar de context. Van den Boogaard en Smoors (2015) schrijven dat het probleemoplossend handelen bevorderd wordt, wanneer de drie fasen van het drieslagmodel stapsgewijs doorlopen worden. Op Afbeelding 4 is het drieslagmodel te zien.



Afbeelding 4. Het drieslagmodel. Overgenomen uit *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie* (p. 146) door M. Van Groenestijn et al., 2011 (<https://erwd.nl/protocol/primair-onderwijs>). Copyright 2011, Koninklijke Van Gorcum.

Het drieslagmodel kent veel overeenkomsten met het eerdergenoemde stappenplan van Pólya (1945). De verschillende fases/stappen uit deze modellen worden hieronder met elkaar vergeleken.

Drieslagmodel	Stappenplan Pólya
Fase 1: plannen -Bestuderen informatie context -Horizontaal mathematiseren (Gerrits & Logtenberg, 2015)	Stap 1: probleem begrijpen -Definiëren van het probleem -Grip krijgen op de structuur om het probleem te visualiseren
-	Stap 2: plannen van aanpak -Proces van horizontaal mathematiseren. -Aanpak bedenken -Selecteren van strategieën, heuristieken en procedures
Fase 2: uitvoeren -Rekenvaardigheden -Verticaal mathematiseren	Stap 3: uitvoeren van aanpak -Rekenvaardigheden -Logisch redeneren -Verticaal mathematiseren
Fase 3: reflecteren -Terugkoppelen naar de context -Oplossingsproces wordt opnieuw uitgevoerd of gecontroleerd door een ander type bewerking	Stap 4: controleren en reflecteren -Terugkoppelen naar de context -Ontwikkelen van metacognitieve kennis

2.3 Conclusie literatuurstudie

Eerst wordt de deelvraag: ‘Wat wordt er verstaan onder het begrip wiskundig denken?’ beantwoord. Binnen het wiskundig denken draait het volgens Van Zanten (2020) om de vaardigheid om zelf een oplossingsmanier voor een probleemopgave te moeten zoeken, vinden of te construeren. Deze beschrijving is gebaseerd op de werkdefinitie van Drijvers (2015a). Hij stelt dat wiskundig denken bedenken is welk wiskundig gereedschap je kunt gebruiken om een probleem aan te pakken. Het wiskundig gereedschap omvat zowel heuristieken als probleemoplossende vaardigheden van een leerling. Heuristieken zijn algemene handvatten om een probleemopgave aan te kunnen pakken (Ale & Van Schaik, 2017; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).

De tweede deelvraag luidt: ‘Welke vaardigheden heeft een leerling uit groep 4/5 nodig om tot wiskundig denken te komen?’ De leerling heeft kennis nodig over verschillende heuristieken. Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) pleiten voor een instructie die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken. Naast het aanleren en beoefenen van heuristieken moet een leerling beschikken over enkele probleemoplossende vaardigheden (Drijvers, 2015a). Deze vaardigheden zijn onderverdeeld in drie kernaspecten: (h)erkennen van een probleem, beschikken over procedurele kennis en het vermogen om oplossingen te bedenken (SLO, 2020).

De derde deelvraag luidt: ‘Waar moeten reken-wiskundeactiviteiten aan voldoen om het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 te stimuleren?’ Verschillende bronnen (Schoenfeld, 1985; Terlouw, 2015; Van Zanten, 2019) stellen dat de probleemoplossende vaardigheden van leerlingen gestimuleerd kunnen worden door leerlingen regelmatig te laten werken aan een probleemopgave. Bij een probleemopgave wordt de leerling geconfronteerd met een vraagstuk waar hij geen standaardoplossingsstrategie voor heeft (Müller, 2020). Probleemopgaven kennen een relatieve kant. Dit hangt onder andere af van de vaardigheid, de voorkennis en de belangstelling van de leerling (Drijvers, 2018). Volgens Van Zanten (2019) kan de geschiktheid van probleemachtige opgaven voor alle leerlingen beoordeeld worden aan de hand van drie kenmerken: (1) aantal gegevens moet beperkt zijn, (2) het moet voor iedereen mogelijk zijn om te kunnen starten, (3) verschillende manieren zijn mogelijk om bij de oplossing te komen. Tijdens het werken aan een probleemopgave is reflecteren volgens Schoenfeld (1985) essentieel. Kool (2020) maakt hierbij een onderscheid tussen cognitief en metacognitief reflecteren. De cognitieve component van rekenwiskundeproblemen bevat zowel horizontaal als verticaal mathematiseren. De metacognitieve kant betreft vooral het oplossingsproces. Om zowel tijdens en na afloop van het werken aan een niet-routinematige opgave te kunnen reflecteren is er een wiskundige attitude bij zowel leerling als leerkracht nodig (De Goeij & Oonk, 2017). De leerkracht moet tijdens het reflecteren de focus leggen op het construeren, vergelijken en evalueren van oplossingsprocessen (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015; Kool, 2020). Om het wiskundig denken bij leerlingen verder te stimuleren, zouden we de juiste vragen moeten stellen (Noteboom, 2020; Sjoers, 2018; Wolfram, 2010). Het stellen van lagere orde vragen draagt volgens Dains (1986) niet bij aan het stimuleren van wiskundig denken bij leerlingen. Hiervoor zijn hogere orde vragen nodig. Noteboom (2020) pleit hierbij voor rijke rekenvragen. Dit zijn rekenvragen waarbij er meerdere antwoorden acceptabel zijn. Noteboom en Verbeeck (2020) hebben twee methoden ontwikkeld waarbij een standaardvraag omgebouwd kan worden naar een rijke rekenvraag.

Tot slot wordt de deelvraag: ‘Op welke wijze kan de leerkracht het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 begeleiden?’ beantwoord. Het drieslagmodel (Van Groenestijn et al., 2011) is een effectief model waarbij de leerkracht de leerlingen stapsgewijs kan begeleiden tijdens het aanpakken van een probleemopgave. Het stappenplan van Pólya (1945) kent veel overeenkomsten met het model voor probleemoplossend handelen. Van Boxel (2019) pleit voor werken met het drieslagmodel waarbij de nadruk steeds op een andere as ligt. Hierdoor leert de leerling zelfstandig denken. Van den Boogaard en Smoors (2015) schrijven dat het probleemoplossend handelen alleen bevordert wordt, wanneer de drie fasen van het drieslagmodel stapsgewijs doorlopen worden.

3. Contextonderzoek

In dit hoofdstuk is er een overzicht te vinden van het contextonderzoek. Eerst worden de deelvragen die leiden tot contextkennis beschreven. Vervolgens worden de methoden van dataverzameling gepresenteerd. Hierbij zijn de volgende onderdelen uitgewerkt: respondenten, beschrijving procedure, instrumenten en analyse. Daarna worden de resultaten van het contextonderzoek beschreven. Tot slot wordt er op basis van de resultaten een conclusie geschreven.

3.1 Inleiding contextonderzoek

Vanuit de praktijk worden de volgende deelvragen beantwoord:

5. In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?

6. In hoeverre worden de leerlingen uit groep 4/5 door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?

7. Wat hebben de leerkrachten uit groep 4/5 nodig om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken?

3.2 Methode contextonderzoek

Tabel 3

Uitwerking methode contextonderzoek

Context deelvraag	Methode van dataverzameling	Onderzoeksinstrument	Respondenten
5. In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?	<u>Bevragen</u> Vragenlijst op papier.	Voorgestructureerde vragenlijst waarin de leerlingen hun eigen vaardigheden beoordelen aan de hand van stellingen met een driepuntsschaal.	De 27 leerlingen uit groep 4/5.
	<u>Bevragen</u> Diagnostisch rekengesprek met open vragen.	Werkblad waarbij de probleemopgaven geselecteerd zijn door de beslisregels van Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) te hanteren.	Drie willekeurige leerlingen uit de populatie.
6. In hoeverre worden de leerlingen door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?	<u>Observeren</u> Indirecte, niet-participerende observatie.	Gestructureerde observatie die gericht is op in welke mate de verschillende niveaus van de Taxonomie van Bloom (1956, herzien in 2001) voorkomen.	De vier leerkrachten van groep 4/5.
	<u>Bevragen</u> Digitale vragenlijst.	Minder gestructureerde vragenlijst waarin de leerkrachten hun eigen competenties beoordelen aan de hand van stellingen met een vijfpuntsschaal.	
7. Wat hebben de leerkrachten uit groep 4/5 nodig om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken?	<u>Bevragen</u> Groepsinterview online.	Minder gestructureerde interviewleidraad.	De vier leerkrachten van groep 4/5.

3.2.1 Vaardigheden leerlingen

De eerste deelvraag binnen het contextonderzoek luidt: ‘In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?’ Er zijn bronnen bestudeerd om de vaardigheden, die passen bij het wiskundig denken in beeld te krijgen. Uit de literatuurstudie is gebleken dat de leerling heuristieken moet bezitten (Ale & Van Schaik, 2017; Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019), de basisvoorwaarden van de leerlijn probleemoplossend denken en handelen moet beheersen (Drijvers, 2015a; SLO, 2020) en dat de leerling in staat moet zijn om te reflecteren, zowel tijdens als na afloop van het oplossingsproces (Kool, 2020; Schoenfeld, 1985). Binnen deze deelvraag wordt er gekeken naar verschillende deelaspecten van deze vaardigheden. Eerst wordt er een vragenlijst bij de leerlingen afgenomen. Om de betrouwbaarheid van de vragenlijst te verifiëren, worden er ook drie willekeurige leerlingen bevraagd. Om conclusies te kunnen trekken over de vaardigheden van leerlingen worden er zodoende meerdere methoden van dataverzameling gehanteerd. Van der Donk en Van Lanen (2020) schrijven dat er hierdoor triangulatie wordt ingebouwd.

Respondenten

Het onderzoek heeft betrekking op de drie groepen 4/5. Alle leerlingen van klas X nemen deel aan de vragenlijst. Dit zijn 27 leerlingen. Er wordt triangulatie ingebouwd door de resultaten te delen met de andere leerkrachten van de groepen 4/5. Zo wordt gekeken of de resultaten van klas X een representatief beeld opleveren. Uit de onderzoekspopulatie worden vervolgens drie willekeurige leerlingen gekozen als respondenten voor het diagnostisch rekengesprek. Het voordeel van deze aselechte steekproeftrekking is volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) dat er geen invloed uitgeoefend kan worden op het keuzeprocess. Deze drie willekeurige respondenten zouden de grotere groep zodoende kunnen vertegenwoordigen.

Procedure

Om de validiteit en betrouwbaarheid van de vragenlijst te verhogen, wordt de vragenlijst eerst voorgelegd aan enkele representatieve respondenten. Twee willekeurige leerlingen uit de andere groep 4 en twee willekeurige leerlingen uit de groepen 5 gaan de vragenlijst in week 4 van het jaar 2021 invullen. Van der Donk en Van Lanen (2020) schrijven dat er op deze manier na gegaan kan worden of de vragen juist geïnterpreteerd worden. Vervolgens vullen de leerlingen van de onderzoekspopulatie tegelijk de vragenlijst in. De vragenlijst wordt afgenomen in week 6 van het jaar 2021. Dit vindt plaats in het eigen klaslokaal, een vertrouwde omgeving voor de leerlingen. De stellingen uit de vragenlijst worden door de groepsleerkracht voorgelezen en waar nodig toegelicht met een voorbeeld. De resultaten van de vragenlijst worden ter controle voorgelegd aan de andere leerkrachten van groep 4/5. Zij kijken of de resultaten overeenkomen met het beeld wat zij hebben van de leerlingen. Dit verhoogt de betrouwbaarheid (Van der Donk & Van Lanen, 2020). Om de betrouwbaarheid van de vragenlijst te verifiëren, wordt er daarnaast gekozen voor een diagnostisch rekengesprek met een deel van de populatie. Aan de hand van kijkpunten en vragen wordt er gekeken hoe deze leerlingen scoren op bepaalde deelaspecten van het wiskundig denken. De drie leerlingen nemen één voor één deel aan het diagnostisch rekengesprek. Het bevragen vindt plaats buiten het klaslokaal, zodat de respondenten geen onrust ervaren (Van der Donk & Van Lanen, 2020). Er wordt gebruik gemaakt van opnameapparatuur zodat het mogelijk is om de situatie, waarin de onderzoeker zelf actief deelneemt, op een later tijdstip te kunnen analyseren.

Instrumenten

De vragenlijst is weergegeven in bijlage C en bestaat uit 17 stellingen met een beoordelingsschaal. Er is gekozen voor een driepuntsschaal, omdat de respondenten bekend zijn met deze keuzes. De respondenten beoordelen de stelling met ‘eens’, ‘neutraal’ of ‘oneens’. Deze keuzes worden weergegeven met smileys. De vragenlijst is gestructureerd door blokken te vormen van stellingen die bij elkaar horen. Er wordt gekeken naar de deelaspecten die passen bij het wiskundig denken. Binnen het diagnostisch rekengesprek worden dezelfde leerlingenvaardigheden onderzocht. Het werkblad kent een open karakter om zo inzicht te krijgen in de redeneringen, aanpakken en oplossingen. Het

werkbild is weergegeven in bijlage D. Er is gekozen om bestaande opgaven te gebruiken. De beslisseregels van Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) worden gehanteerd om een selectie te maken. De opgaven komen uit artikelen en boeken rondom wiskundig denken. Van Zanten (2019) heeft daarnaast kenmerken opgesteld om de geschiktheid van een probleemopgave te beoordelen voor elke leerling. Deze drie kenmerken hebben mede bepaald welke opgaven in het diagnostisch rekengesprek gebruikt gaan worden. In bijlage E is er een onderzoeksinstrument opgesteld om zicht te krijgen op de vaardigheden van de leerling. Het instrument bevat verschillende kijkpunten en vragen. Tijdens de afname van het diagnostisch rekengesprek vormen deze uitgangspunten de leidraad.

Analyse

De vragenlijst wordt geanalyseerd door gebruik te maken van analysemethode 5: aantallen berekenen (Van der Donk & Van Lanen, 2020). Hierdoor kan er nagegaan worden hoe vaak een keuzemogelijkheid gekozen is. Van der Donk en Van Lanen (2020) schrijven dat de verkregen data getransformeerd kan worden naar een staafdiagram (horizontaal), zodat er een beter inzicht in de data gegeven kan worden. Binnen de vragenlijst wordt er gekeken naar hoe de leerlingen zichzelf beoordelen op het gebied van heuristieken, reflecteren en het bezitten van probleemoplossende vaardigheden. Vervolgens wordt er gekeken of het zelfbeeld van de leerlingen overeenkomt met het beeld van de leerkrachten en met het beeld wat het diagnostisch rekengesprek heeft opgeleverd. De oplossingsaanpakken van de leerling worden geanalyseerd door analysemethode 10: data analyseren aan de hand van categorieën (Van der Donk & Van Lanen, 2020). De categorieën die binnen deze analyse gehanteerd worden, zijn: heuristieken, probleemoplossende vaardigheden en reflecteren. Door deze deductieve werkwijze wordt er gekeken wat de frequentie is van een bepaalde categorie. Vervolgens wordt er per respondent gekeken of deze frequentie overeenkomt met de data-analyse vanuit de vragenlijst.

3.2.2 Wiskundig denken binnen de huidige situatie

De tweede deelvraag binnen het contextonderzoek luidt: ‘In hoeverre worden de leerlingen door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?’ Om leerlingen uit te dagen tot wiskundig denken is het stellen van de juiste vraag essentieel (Wolfram, 2010). Het stellen van lagere orde vragen draagt volgens verschillende bronnen (Noteboom, 2020; Sjoers, 2018; Wolfram, 2010) niet bij aan het stimuleren van wiskundig denken. Hiervoor zijn hogere orde vragen nodig. Met behulp van de Taxonomie van Bloom (1956, herzien in 2001) zal er gekeken worden of de leerkrachten doorgaans meer lagere orde of hogere orde vragen stellen. Dit gebeurt door middel van een indirecte observatie. Om triangulatie in te bouwen, wordt er naast de bovengenoemde manier van data verzameling ook gebruik gemaakt van een vragenlijst. De (online) vragenlijst bevat meerdere aspecten van leerkrachtvaardigheden. Zo schrijven Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) dat leerlingen instructie moeten krijgen over het gebruik van heuristieken. Om de probleemoplossende vaardigheden van leerlingen te stimuleren, is het volgens Van Zanten (2019; 2020) nodig om leerlingen te laten werken aan probleemopgaven. Daarnaast worden de leerkrachten bevraagd naar de huidige vorm van instructie. Boxel (2019) pleit voor rekenlessen waarbij de leerlingen de kans krijgen om zelf na te mogen denken. De verschillende assen van het drieslagmodel (Van Groenestijn et al., 2011) bieden hiervoor vele kansen.

Respondenten

Respondenten voor deze deelvraag zijn de leerkrachten van de drie groepen 4/5. De vier leerkrachten van de middenbouw worden bevraagd en geobserveerd. Doordat dezelfde respondenten gehanteerd worden, kunnen de resultaten vanuit de vragenlijst vergeleken worden met het beeld vanuit de observatie.

Procedure

Er is gekozen voor een indirecte observatie in een natuurlijke situatie. De observaties vinden plaats in week 5 en 6 van het jaar 2021. Binnen de indirecte observatie wordt er gebruik gemaakt van opnameapparatuur. De gemaakte opnames worden gecontroleerd door een ‘critical friend’. Zo is de analyse gebaseerd op meer dan één waarneming. Dit zorgt volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) voor triangulatie. Om de betrouwbaarheid daarnaast te verhogen, worden de analyses van de observaties teruggekoppeld naar de respondenten. De respondenten kunnen zo aangeven of zij zich herkennen in het beeld van de gegeven les en of dit beeld kenmerkend is voor een reguliere les. Naast het observeren worden de leerkrachten bevraagd. De vragenlijst wordt in week 4 van het jaar 2021 ter controle voorgelegd aan twee collega’s uit de groepen 3. Zij zijn representatief voor de respondenten die bevraagd gaan worden. Op deze manier wordt er nagegaan of de vragen goed begrepen worden en of de antwoordmogelijkheden passend zijn. Volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) verhoog je met deze stap de validiteit en de betrouwbaarheid van de vragenlijst. In week 5 van zal er per e-mail een online vragenlijst naar de respondenten worden gestuurd. Begin week 7 zal er reminder worden verzonden, mits dit nodig is.

Instrumenten

Om de contextvraag te onderzoeken, wordt er gebruik gemaakt van het onderzoeksinstrument ‘Observatie leerkracht’. Dit onderzoeksinstrument is weergegeven in bijlage F. Het observatieschema is gericht op in welke mate iets voorkomt. De vragen die de leerkrachten aan de leerlingen stellen, worden in dit schema genoteerd. Het andere onderzoeksinstrument binnen deze contextvraag is gepresenteerd in bijlage G: ‘Vragenlijst leerkracht’. De vragenlijst bevat 14 stellingen met een vijfpuntsschaal. Er is gekozen voor een vijfpuntsschaal, zodat nuances gemeten kunnen worden. De vragenlijst start met een inleiding waarin aangegeven wordt wat het doel is van de vragenlijst, het verloop van de vragenlijst en dat de resultaten geanonimiseerd worden. De vragenlijst is onderverdeeld in de volgende categorieën: heuristieken, aanbieden van probleemopgaven, hogere orde vragen en de huidige manier van instructie geven. Dit is gebaseerd op de conclusie van de literatuurstudie, zie hoofdstuk 2.3.

Analyse

De minder gestructureerde data binnen het observeren worden geanalyseerd aan de hand van categorieën. Met behulp van het ‘Gereedschap: formuleren van denkactiviteiten’ worden de leerkrachtvragen ondergebracht bij een niveau van de Taxonomie van Bloom. Het ‘gereedschap’ is te vinden in bijlage H. Door de vragen onder te brengen bij een niveau kan er geconcludeerd worden of de leerkrachten doorgaan meer lagere orde of hogere orde vragen stellen. Om een compleet beeld te krijgen, wordt er daarnaast gekeken naar de resultaten vanuit de vragenlijst. De vragenlijst wordt geanalyseerd door analysemethode 5, aantallen berekenen, te gebruiken (Van der Donk & Van Lanen, 2020). Deze aantallen worden weergegeven in een staafdiagram (horizontaal). Deze manier van presenteren kan volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) een beter inzicht in de verkregen data geven.

3.2.3 Leerkrachtcompetenties

De laatste deelvraag die wordt onderzocht luidt: ‘Wat hebben de leerkrachten uit groep 4/5 nodig om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken?’ Op donderdag 28 januari wordt er bij de leerkrachten van groep 4/5 een groepsinterview afgenomen. Dit vindt plaats tijdens de online bouwvergadering. De leerkrachten worden eerst meegenomen in het onderzoeksproces. De conclusies uit de literatuurstudie worden met de respondenten gedeeld. Vervolgens vindt er een groepsinterview plaats. Binnen dit interview staat het handelingsrepertoire, vaardigheden, kennis en attitude, van de leerkracht centraal. Doel van het interview is zicht krijgen op wat de leerkrachten nodig hebben om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken. Deze resultaten worden, waar mogelijk, binnen hoofdstuk 5 omgezet naar ontwerpeisen.

Respondenten

De respondenten binnen dit groepsinterview zijn de vier leerkrachten van groep 4/5. Het thema dat onderzocht wordt, speelt zich af op bouwniveau en daarom is de keuze gemaakt voor een groepsinterview. Het voordeel van een groepsinterview is volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) dat respondenten op elkaar kunnen reageren.

Procedure

Tijdens de teamvergadering van de middenbouw worden de resultaten van de literatuurstudie met de respondenten gedeeld. Deze resultaten zijn onderverdeeld in de volgende competenties: kennis (wat), vaardigheden (hoe) en attitude (waarom). Hierdoor krijgen de respondenten input voor het groepsinterview. Tijdens het groepsinterview wordt er geïnventariseerd wat de leerkrachten nodig hebben om het wiskundig denken bij leerlingen uit groep 4/5 te stimuleren. Het interview bevat een inleiding, kern en slot. Tijdens de inleiding wordt het doel van het interview benoemd, toestemming gevraagd voor het opnemen van het gesprek en wordt er gesproken over het terugkoppelen van de resultaten. Na afloop van het interview zullen de respondenten het interview nalezen en controleren of de antwoorden juist geïnterpreteerd zijn. Dit verhoogt volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) de betrouwbaarheid en validiteit van het interview. Vervolgens wordt het gespreksverslag geanonimiseerd. Binnen de kern van het interview staat de trechterstructuur centraal om zo tot data te komen die relevant zijn voor de onderzoeksvraag. Tijdens het slot van het interview krijgen de respondenten de mogelijkheid om aanvullende vragen/opmerkingen te doen. Ook worden de respondenten bedankt voor het gesprek.

Instrumenten

Er wordt gebruik gemaakt van een minder gestructureerde interviewleidraad met enkele gedefinieerde vragen. De interviewleidraad is weergegeven in bijlage I. De deelaspecten vormen een mogelijke richting binnen het interview. Er wordt gestart met stellen van een algemene vraag die de huidige situatie in kaart brengt. Na verloop van tijd wordt er gevraagd naar de gewenste situatie.

Analyse

Voor het analyseren zijn er categorieën opgesteld, zodat de resultaten geanalyseerd kunnen worden. Binnen deze deductieve werkwijze van analysemethode 10, data analyseren aan de hand van categorieën, wordt er gezocht naar tekstfragmenten die betrekking hebben op één of meerdere categorieën (Van der Donk & Van Lanen, 2020). Binnen deze deelvraag wordt er een onderscheid gemaakt tussen de categorieën: kennis, vaardigheden en attitude, oftewel het handelingsrepertoire van de leerkracht. Het groepsinterview wordt getranscribeerd door Amber Script van Surfspot. Vervolgens wordt er gekeken naar betekenisvolle tekstfragmenten binnen deze categorieën.

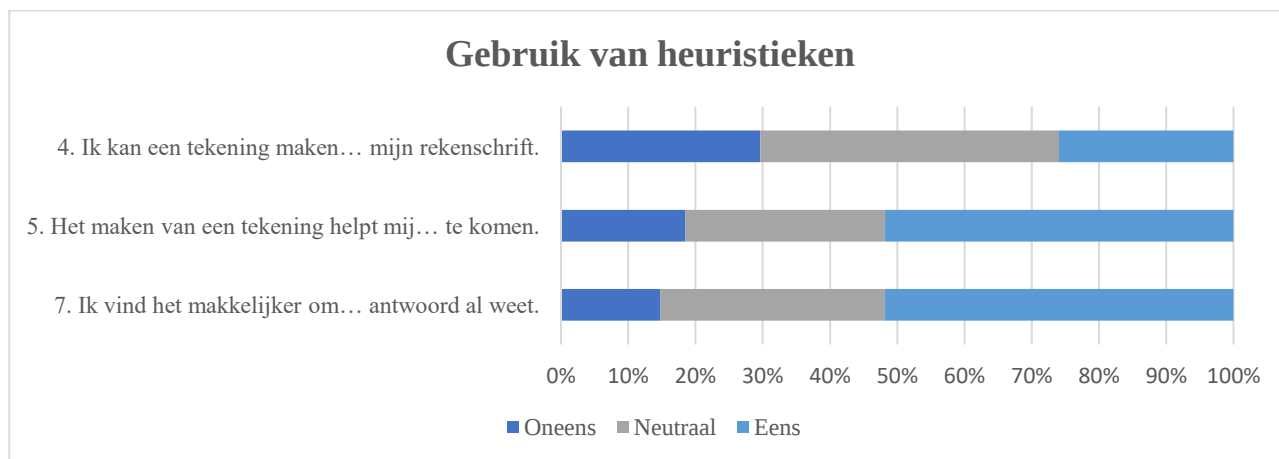
3.3 Resultaten contextonderzoek

3.3.1 Vaardigheden leerlingen

De resultaten van de vragenlijst, die zijn afgenomen bij de leerlingen, geven antwoord op de volgende contextvraag: ‘In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?’ Vervolgens worden de gegevens geanalyseerd door deze te vergelijken met de resultaten vanuit het diagnostisch rekengesprek.

De meerderheid van de leerlingen geeft aan dat het maken van een tekening helpt om bij het antwoord te komen. Binnen de onderzoekspopulatie geeft 26% van de leerlingen aan dat zij altijd in staat zijn om een tekening of schets te maken bij een rekenprobleem (Figuur 1). Binnen het diagnostisch gesprek lukte het de drie leerlingen niet om zelfstandig een schets te maken bij één van de rekenproblemen. Leerling 2 en 3 antwoorden ‘neutraal’ op de stelling: ‘Ik kan een tekening maken bij moeilijke opdrachten in het rekenschrift.’ Leerling 1 gaf aan dit wel te kunnen. Tijdens het diagnostisch gesprek gaven alle drie de (controle) leerlingen aan dat het maken van een schets ze hielp om het probleem uiteindelijk op te lossen. Leerling 2 zei: “Eerst vond ik het lastig, maar jij hebt mij geholpen met een manier en toen ben ik zelf verder gegaan.”

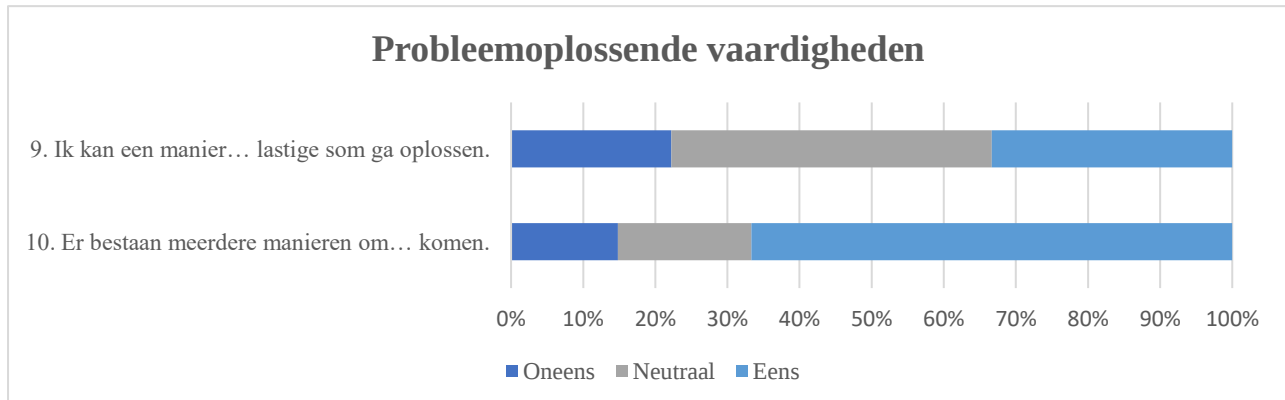
De resultaten van de vragenlijst zijn voorgelegd aan de leerkrachten van de andere groepen 4/5. Zij geven aan het beeld (Figuur 1) deels te herkennen. De vaardigheid om een tekening/schets van een rekenprobleem te maken, wordt volgens de leerkrachten door de leerlingen als lastig ervaren. Binnen de vragenlijst geeft 30% van de leerlingen aan dit niet te kunnen. De leerkrachten vinden dit geen representatief beeld en zouden dit percentage leerlingen hoger beoordelen. De meerderheid van de leerlingen, inclusief de drie controle leerlingen, is het ‘eens’ met de stelling: ‘Ik vind het makkelijker om een som op te lossen wanneer ik het antwoord al weet.’ Opvallend is dat alleen leerling 2 bij opgave 6, zie bijlage D, in staat was om terug te redeneren vanuit het antwoord.



Figuur 1. Leerlingenantwoorden vragenlijst.

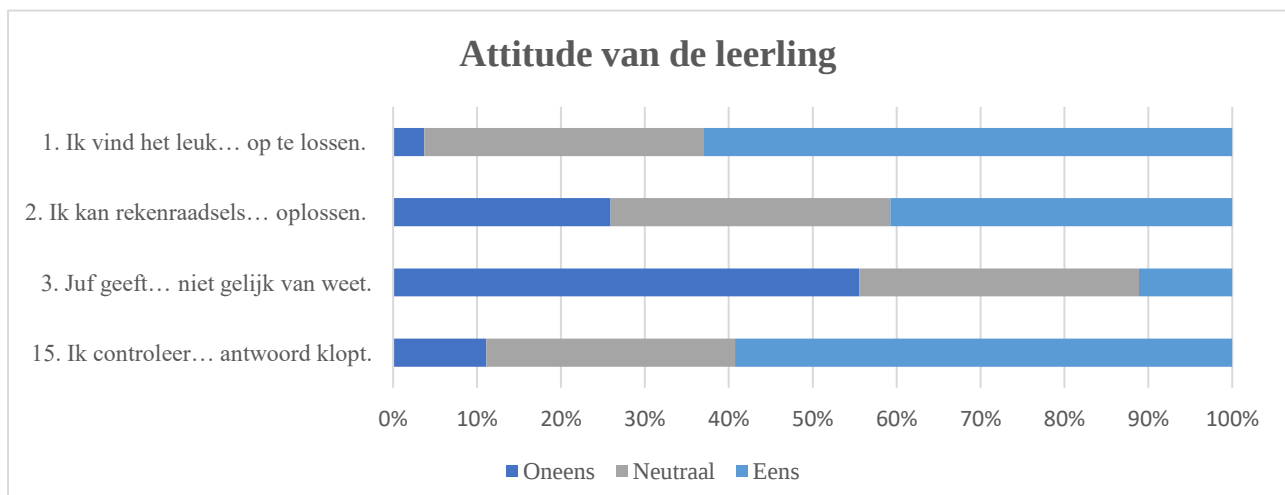
33% van de leerlingen geeft aan dat zij een manier kunnen bedenken bij het oplossen van een lastige som. 22% van de leerlingen geeft aan dit niet te kunnen (Figuur 2). Controle leerling 2 en 3 beantwoorden deze stelling met ‘neutraal’. Leerling 1 geeft in de vragenlijst aan een manier te kunnen bedenken voor het oplossen van een lastige som. Tijdens het bevragen werd duidelijk dat controle leerling 1 een aanpak kon bedenken bij de probleemopgaven. Dit beeld komt overeen met de ingevulde vragenlijst. Leerling 2 kon niet geheel zelfstandig een aanpak bedenken bij de complexere probleemopgaven. Na het geven van een aanwijzing lukte het de leerling om een aanpak te bedenken. Dit beeld komt overeen met de ingevulde vragenlijst. Leerling 3 was niet in staat om een aanpak te bedenken bij meerdere probleemopgaven van het werkblad. Het ingevulde antwoord op de vragenlijst komt niet overeen met het beeld vanuit het diagnostisch rekengesprek.

Op de stelling: ‘Er bestaan meerdere manieren om bij een rekenvraag tot een oplossing te komen.’ geeft 67% van de leerlingen, inclusief de drie controle leerlingen, aan het hiermee eens te zijn. Echter, de controle leerlingen zijn verbaasd dat opgave 4 (zie bijlage D) meerdere, acceptabele antwoorden kent. Zij waren overtuigd dat het gegeven antwoord het enige, goede antwoord kon zijn. Andere redenties om aan te geven dat een getal er niet bij hoort, konden de controle leerlingen niet zelfstandig bedenken.



Figuur 2. Leerlingenantwoorden vragenlijst.

Uit de vragenlijst blijkt dat 63% van de leerling het leuk vindt om rekenraadsels op te lossen (zie Figuur 3). De leerlingen beoordelen hun eigen vaardigheden om een rekenraadsel of puzzel op te lossen een stuk lager. 41% geeft aan dat hij of zij soms in staat is om een rekenraadsel en/of -puzzel op te lossen. Controle leerling 1 geeft aan niet in staat te zijn om een rekenraadsel op te lossen. In het diagnostisch rekengesprek blijkt deze leerling wel in staat te zijn om de opgaven op te lossen. Na afloop wordt de leerling bevraagd en geeft de leerling aan wel in staat te zijn om een rekenraadsel op te lossen. Controle leerlingen 2 en 3 beantwoorden deze stelling neutraal. Dit beeld komt overeen met het diagnostisch rekengesprek. Opvallend is dat 56% van de leerlingen ervaart dat zij nooit een rekenopdracht aangeboden krijgen waar zij het antwoord niet gelijk van weten. In de vragenlijst worden de leerlingen daarnaast bevraagd over hun eigen reflectievermogen. 59% van de leerlingen geeft aan dat zij na afloop van het oplossingsproces het gegeven antwoord controleren. Dit vullen controle leerlingen 1 en 2 ook in. Tijdens het bevragen geven de leerkrachten aan dit beeld niet te herkennen. Zij zien de leerling nauwelijks het oplossingsproces controleren. Het beeld van de leerkrachten komt overeen met het beeld vanuit het diagnostisch rekengesprek. De controle leerlingen controleerden de gegeven antwoorden niet. Tijdens het bevragen gaven zij, de controle leerlingen, aan dit ook niet nodig te vinden. Het leek erop dat de ze niet wisten hoe zij dit konden doen.

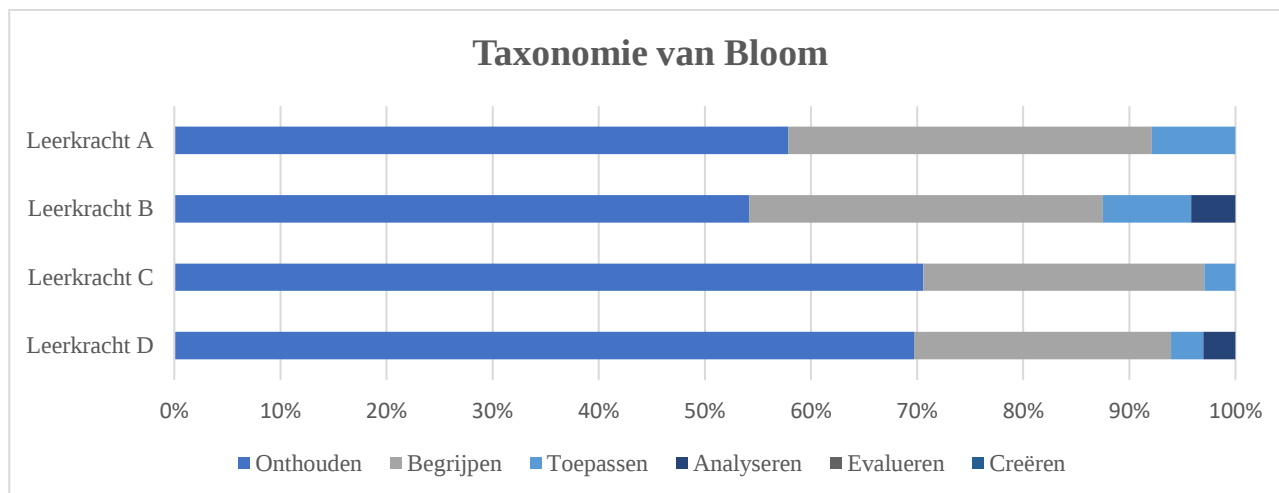


Figuur 3. Leerlingenantwoorden vragenlijst.

3.3.2 Wiskundig denken binnen de huidige situatie

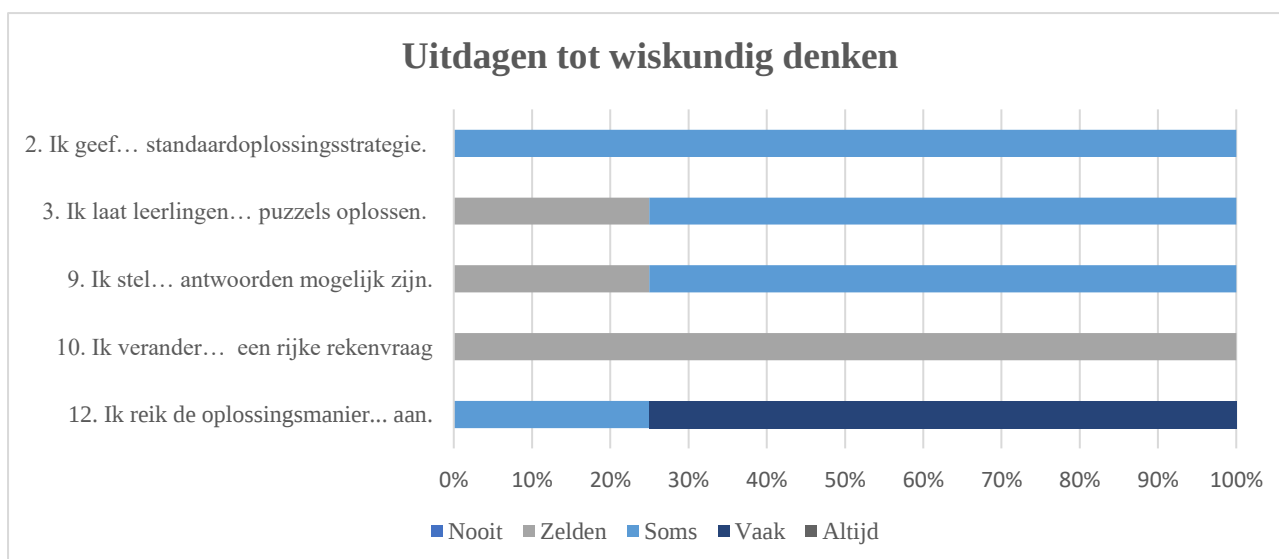
Binnen deze deelvraag zijn de leerkrachten indirect geobserveerd. Om een volledig beeld te krijgen van de leerkrachtvaardigheden zijn de leerkrachten door middel van een online vragenlijst bevraagd. Deze resultaten geven antwoord op de contextvraag: 'In hoeverre worden de leerlingen door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?'

Uit de observatie blijkt dat de leerkrachten doorgaans vragen stellen die gericht zijn op het lagere orde denken. Zie Figuur 4 voor een overzicht van de verkregen resultaten vanuit de indirecte observatie in een natuurlijke situatie. Dit beeld komt overeen met de vragenlijst. Op de vraag: 'Tijdens de rekenles stel ik ... vragen die gericht zijn op het hogere orde denken van leerlingen.' vullen leerkrachten B, C en D 'soms' in. Leerkracht A beantwoordt deze vraag met 'zelden'.



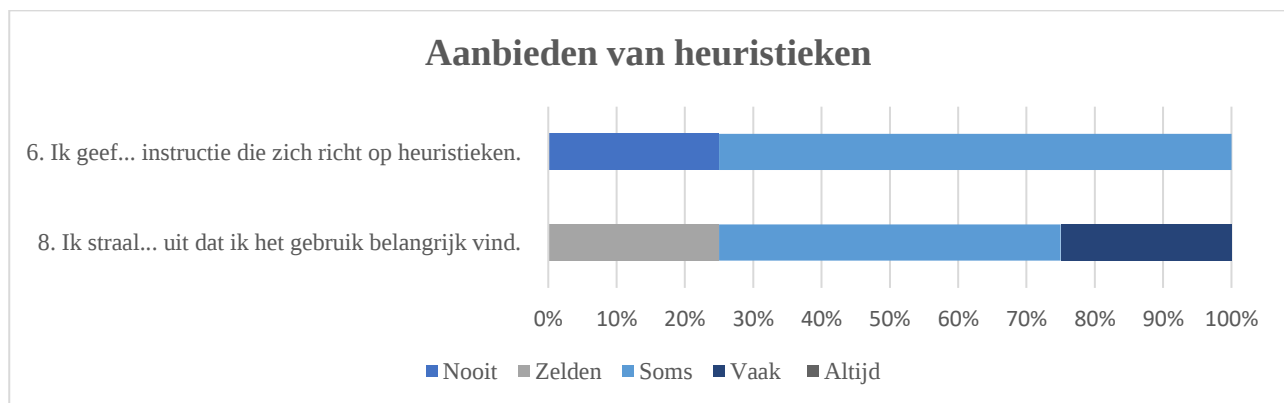
Figuur 4. Resultaten observatie leerkrachten.

In Figuur 5 is te zien dat 75% van de leerkrachten 'soms' een vraag stelt waarop meerdere, acceptabele antwoorden mogelijk zijn. Het veranderen van een standaardvraag naar een rijke rekenvraag gebeurt door de leerkrachten 'zelden'. De leerkrachten geven aan dat ze de leerlingen 'soms' een vraagstuk geven waar de leerling nog geen standaardoplossingsstrategie voor heeft. Leerkracht A, B en D laten de leerlingen 'soms' rekenraadsels en puzzels oplossen. Leerkracht C doet dit 'zelden'. 75% van de leerkrachten vult in dat zij 'vaak' de oplossingsmanier tijdens de instructie aan de leerlingen aanreiken. Leerkracht B doet dit 'soms'.



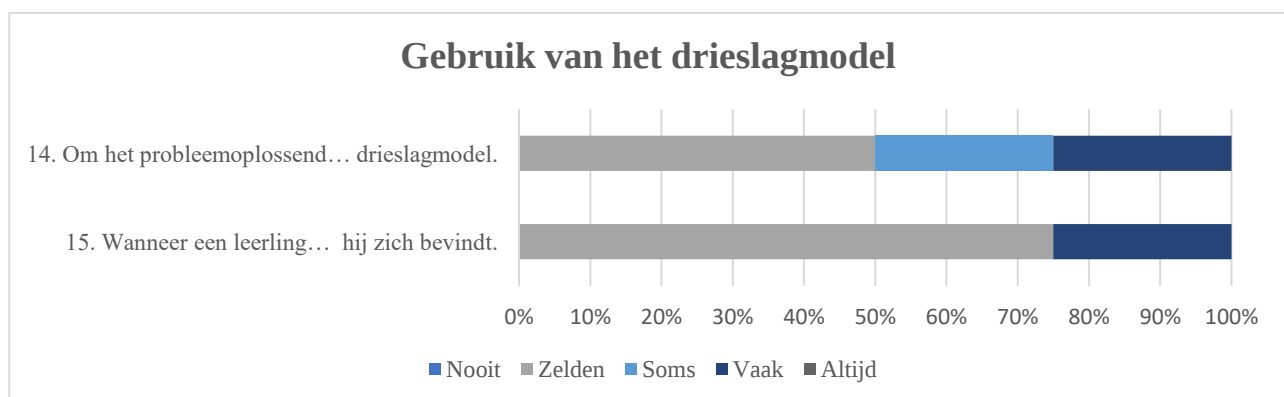
Figuur 5. Resultaten vragenlijst leerkrachten.

Uit de vragenlijst blijkt dat leerkracht C ‘nooit’ een instructie geeft die zich richt op het gebruiken van heuristieken. Leerkracht A, B en D doen dit ‘soms’. Het belang van heuristieken beoordelen de meeste leerkrachten hoger. Dit verschil is te zien in Figuur 6.



Figuur 6. Resultaten vragenlijst leerkrachten.

In Figuur 7 worden de resultaten over het drieslagmodel gepresenteerd. Het drieslagmodel wordt door de leerkrachten A en C ‘zelden’ gebruikt. Leerkracht D hanteert het drieslagmodel ‘vaak’ en weet in welke fase een leerling zich bevindt als hij tijdens het oplossen van een probleem vastloopt. De andere leerkrachten beoordelen deze stelling met ‘zelden’.



Figuur 7. Resultaten vragenlijst leerkrachten.

3.3.3 Leerkrachtcompetenties

Binnen het groepsinterview wordt eerst de huidige situatie bevraagd. Leerkracht D geeft aan dat zij het wiskundig denken toepast in alles wat tussendoor gebeurt. Ze geeft verschillende voorbeelden: “Als ik aan het voorlezen ben, stel ik regelmatig rekenvragen als deze naar voren komen of tijdens de dagopening bij het bespreken van de kalender.” Daarnaast past deze leerkracht de stappen vanuit het drieslagmodel toe in haar lessen. De andere leerkrachten doen dit (nog) niet. Zij bieden contexten aan, zodat er betekenisvol gerekend kan worden. Leerkracht B geeft als voorbeeld: “Bij het leren over oppervlakten gaan leerlingen zelf uitrekenen hoeveel behang ze nodig hebben voor hun eigen kamer.”

Er wordt vervolgens gevraagd naar wat de leerkrachten de leerlingen willen leren met betrekking tot het wiskundig denken. Leerkracht B en C geven aan dat het een gewenste situatie zou zijn als leerlingen zelf de bewerking terugkoppelen naar de context en zich afvragen: “Kan mijn antwoord wel kloppen?” Leerkracht D voegt daaraan toe dat ondersteuning vanuit de leerkracht hierbij wenselijk is: “Leerlingen komen wel tot een oplossing, maar ze koppelen het niet tot nauwelijks terug naar de context.” Leerkracht A voegt toe dat ze eerst graag meer kennis over het drieslagmodel zou willen verwerven: “Dat model voor probleemoplossend handelen lijkt me interessant.” De

leerkrachten komen tot de conclusie dat ze graag een instructie volgens het drieslagmodel willen aanbieden, waarbij de focus steeds op een andere as ligt. Leerkracht D voegt toe: “Maar de leerlingen moeten wel eerst de vaardigheden aangeleerd krijgen.” Hiermee bedoelt de leerkracht dat de leerlingen eerst voldoende handvatten moeten ontwikkelen, voordat zij zelf bezig gaan met construeren van een oplossingsproces. Er wordt toegevoegd dat de zwakkere rekenaars behoefte hebben aan één strategie. Leerkracht C zou daarnaast graag meer kennis en vaardigheden willen opdoen bij het stellen van de juiste vraag. De leerkrachten geven binnen het groepsinterview aan dat het lastig is om snel een goede vraag te bedenken. Leerkracht C vult aan: “Vaak vraag je toch naar de bekende weg.” Een andere leerkracht voegt hieraan toe: “Eerst moeten wij de juiste denkstand hebben, voordat we dit van de leerlingen kunnen verwachten.”

3.4 Conclusie contextonderzoek

Er wordt antwoord gegeven op de contextvraag: ‘In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?’ In de praktijk blijkt dat de leerlingen weinig kennis van heuristieken bezitten. De controle leerlingen zijn niet in staat om een schets te maken bij een van de probleemopgaven. Drie van de vier leerkrachten geven in de vragenlijst aan dat zij ‘soms’ een instructie geven die zich richt op het gebruik van heuristieken. Eén leerkracht doet dit ‘nooit’. De meerderheid van de leerlingen geeft in de vragenlijst aan dat zij het antwoord altijd controleren. Dit beeld komt niet overeen met het beeld van de leerkrachten en de gegevens vanuit het diagnostisch gesprek. Hieruit kan geconcludeerd worden dat het metacognitief reflecteren nog de nodige aandacht en begeleiding vereist. Het laatste kenmerk waarop de leerlingen beoordeeld zijn, is hun wiskundige attitude (De Goeij & Oonk, 2017). 78% van de leerlingen geeft aan dat zij ‘soms’ of ‘altijd’ een rekenraadsel kunnen oplossen. Het percentage wat het oplossen van een rekenraadsel leuk vindt, ligt hierbij hoger. De meerderheid van de leerlingen heeft plezier in het oplossen van puzzelachtige opgaven. Deze voorwaarde, binnen de wiskundige attitude van De Goeij en Oonk (2017), is voldoende ontwikkeld.

Binnen de tweede contextvraag wordt er antwoord gegeven op de vraag: ‘In hoeverre worden de leerlingen door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?’ Uit de observaties en de ingevulde vragenlijst blijkt dat de leerkrachten doorgaans lagere orde vragen stellen. Uit de literatuurstudie is gebleken dat je leerlingen ook kunt stimuleren tot wiskundig denken door ze ervaring op te laten doen met probleemopgaven. In de praktijk blijkt dat dit nog weinig gebeurt. Dit beeld wordt bevestigd in de vragenlijst. 56% van de leerlingen geeft aan het ‘oneens’ te zijn met de stelling: ‘Juf geeft mij wel eens rekenopdrachten waar ik het antwoord niet gelijk van weet.’ Er is voor de leerling (te) weinig ruimte om zelf te mogen werken aan probleemopgaven. Er valt winst te behalen door leerlingen rekenraadsels, puzzels en probleemopgaven aan te gaan bieden. Daarnaast lijkt het erop dat de leerkrachten handvatten missen om een standaardvraag uit de methode om te kunnen bouwen naar een rijke rekenvraag. Dit is gebaseerd op de vraag: ‘Ik verander ... een standaardvraag uit de methode naar een rijke rekenvraag.’ Het laatste aspect waarop de leerkrachten bevraagd zijn, is het gebruik van het drieslagmodel. De helft van de leerkrachten gebruikt het drieslagmodel ‘zelden’ tijdens een rekeninstructie.

De laatste contextvraag luidt: ‘Wat hebben de leerkrachten uit groep 4/5 nodig om leerlingen te stimuleren tot wiskundig denken?’ De leerkrachten plaatsen zich voornamelijk bij de competentie vaardigheden. Er is behoefte aan handvatten om als leerkracht de leerlingen in de juist denkstand te krijgen. De leerkrachten zijn benieuwd naar de mogelijkheden van rijke rekenvragen. Naast het stellen van de juiste vragen zien de leerkrachten kansen in het gebruik van het drieslagmodel. Dit model wordt nog niet door elke leerkracht gehanteerd tijdens de rekenlessen. Deze conclusie kwam ook naar voren in de resultaten van de vragenlijst. In het groepsinterview geeft leerkracht A aan dat ze behoefte heeft aan kennis rondom het drieslagmodel. De andere leerkrachten vragen zich af hoe ze ervoor kunnen zorgen dat leerlingen zelf gaan controleren of de door hen gegeven antwoorden kloppen.

4. Conclusie en discussie

In dit hoofdstuk is er een presentatie van discussiepunten, beperkingen en mogelijkheden voor een vervolgonderzoek te lezen. Vervolgens wordt er binnen de eindconclusie antwoord gegeven op de hoofdvraag van dit praktijkgerichte onderzoek. Tot slot volgen er aanbevelingen voor in de praktijk.

4.1 Discussie

4.1.1 Discussiepunten

De betrouwbaarheid van het onderzoek levert verschillende discussiepunten op. Als eerste wordt de beoordelingsschaal in de leerlingenvragenlijst ter discussie gesteld. Binnen de vragenlijst is er een driepuntsschaal, weergegeven met smileys, gehanteerd. Er is door de leerlingen (vrij) vaak voor het neutrale antwoord gekozen. Dit antwoord levert binnen het onderzoek weinig informatie op, omdat het lastig te bepalen is wat de leerlingen daadwerkelijk van de stelling vinden. Er had beter voor een vierpuntsschaal gekozen kunnen worden, zodat er geen ruimte is om neutraal te antwoorden. Dit had de leerling gedwongen om een keuze te maken in de richting van eens of oneens. Daarnaast kan de betrouwbaarheid van de indirecte observatie bij de leerkrachten ter discussie worden gesteld. Binnen het onderzoek zijn de leerkrachten veelal meegenomen in bepaalde keuzes en ontwikkelingen. Dit creëert volgens Van der Donk en Van Lanen (2020) draagvlak en zorgt voor een transparant proces: het is voor de belanghebbenden duidelijk hoe het onderzoek uiteindelijk tot stand is gekomen. Uit ethische overwegingen zijn de leerkrachten veelzijdig geïnformeerd over de niet-participerende, indirecte observatie. De leerkrachten waren bewust van het observatiedoel en de procedure rondom het verzamelen van de data. Deze informatie kan er bewust en onbewust voor hebben gezorgd dat het handelen van de leerkracht tijdens de indirecte observatie beïnvloed is (Van der Donk & Van Lanen, 2020).

Daarnaast is er sprake van een verschil in visie op het wiskundig leren denken bij zwakkere rekenaars. Uit het groepsinterview blijkt dat de meeste leerkrachten vooral de betere rekenaars willen uitdagen tot wiskundig denken. Over de zwakkere rekenaars wordt gezegd dat zij baat hebben bij één strategie en een duidelijke instructie. De zwakkere rekenaar zou minder behoefte hebben aan wiskundig denken. Ook in de literatuur vinden we dit soort uitspraken regelmatig terug: ‘Probleemoplossen is moeilijk en alleen geschikt voor de betere rekenaars’. Een terecht punt wat hier ter discussie wordt gesteld, want is wiskundig denken alleen geschikt voor betere rekenaars? Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) betogen dat alle leerlingen de kans verdienen om wiskundige denkwijzen, als probleemoplossen, modelleren en creatief wiskundig denken, te leren. Uit de literatuurstudie blijkt dat probleemopgaven een relatief karakter kennen (Drijvers, 2015a; 2018). Van Zanten (2019) heeft daarom drie kenmerken opgesteld om de geschiktheid van een probleemopgave voor alle leerlingen te beoordelen. Deze kenmerken zorgen ervoor dat iedere leerling, ondanks uiteenlopende reken-wiskundige kennis en vaardigheden, een begin kan maken aan het oplossingsproces. Dit zorgt ervoor dat leerlingen niet worden afgeschrikt door een probleemopgave, maar juist de kans krijgen om succeservaring op te doen met wiskundig probleemoplossen. Probleemoplossen is ten slotte leuk en belangrijk voor alle leerlingen (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015; Van Zanten, 2019).

4.1.2 Beperkingen

De huidige situatie rondom het coronavirus is ervaren als een beperkende factor binnen het onderzoek. De situatie heeft ervoor gezorgd dat er andere keuzes rondom het verzamelen van data gemaakt moesten worden. Toen de scholen op maandag 8 februari 2021 weer open mochten, zijn de leerlingen bevraagd en hebben er observaties plaatsgevonden. In het onderzoeksplan was beschreven dat de leerkrachten meerdere keren, direct geobserveerd zouden worden. Door de beperkte tijd en maatregelen binnen het onderwijs was dit niet haalbaar en is er voor het second best gekozen: indirect, eenmalig observeren bij de leerkrachten van groep 4/5. Van der Donk en Van Lanen (2020) schrijven dat eenmalig observeren vaak geen betrouwbaar beeld oplevert. Om de betrouwbaarheid te verhogen,

zijn de resultaten vanuit de observatie aan de leerkrachten voorgelegd. De leerkrachten konden hierdoor aangeven of het beeld kenmerkend was voor een representatieve les. Daarnaast is de vraag: ‘Tijdens de rekenles stel ik ... vragen die gericht zijn op het hogere orde denken van leerlingen.’ extra toegevoegd aan de online vragenlijst voor de leerkracht. Het toevoegen van deze vraag zorgt voor triangulatie binnen de contextvraag: ‘In hoeverre worden de leerlingen door de leerkracht uitgedaagd om wiskundig te denken?’

Binnen de uitvoering van het contextonderzoek was de tijd een beperkende factor. Toen de scholen weer open mochten, was er weinig tijd om data te verzamelen. Binnen de contextvraag: ‘In hoeverre zijn leerlingen uit groep 4/5 in staat om wiskundig te denken?’ is er gekozen om kleinschaliger data te gaan verzamelen. De vragenlijst is afgenomen bij 27 respondenten, de leerlingen van één klas. Daarnaast zijn er drie willekeurige leerlingen bevraagd in een diagnostisch rekengesprek. Dit is een klein aantal respondenten en daarom is gekozen om de resultaten vanuit de vragenlijst ter controle voor te leggen aan de andere leerkrachten van de groepen 4/5. De andere leerkrachten konden reageren op dit beeld en hierdoor kon er alsnog uitspraak gedaan worden over de vaardigheden van de leerlingen met betrekking tot wiskundig denken, ondanks het kleine aantal respondenten.

4.1.3 Mogelijkheden vervolgonderzoek

Binnen dit onderzoek is er gekeken naar de mogelijkheden waarmee de leerkrachten de leerlingen kunnen stimuleren tot wiskundig denken. Er wordt ingestoken op leerlingen ervaring op te laten doen met probleemoplossen en de leerkrachten handvatten bieden voor het stellen van de juiste vraag. In de toekomst kan er onderzocht worden hoe het wiskundig denken een structurele plek binnen het basisonderwijs kan krijgen en in welke mate digitale middelen ingezet kunnen worden om dit doel te verwezenlijken.

4.2 Conclusie en advies

4.2.1 Eindconclusie

In dit onderzoeksrapport wordt er antwoord gegeven op de volgende hoofdvraag: ‘Hoe kunnen de middenbouwleerkrachten het wiskundig denken van leerlingen uit groep 4/5 binnen het reken-wiskundeonderwijs stimuleren?’

Wiskundig denken wordt gezien als de vaardigheid waarbij leerlingen zelf een oplossingsmanier voor een probleemopgave moeten zoeken, vinden of construeren (Van Zanten, 2020). Deze productieve en creatieve manier van denken, leert een leerling niet vanzelf. Het is nodig dat de leerling ervaring opdoet met wiskundig probleemoplossen, inclusief het reflecteren op die ervaringen (Schoenfeld, 1985). Reflecteren op probleemopgaven bevat volgens Kool (2020) een cognitief en metacognitief component. In de praktijk blijken de leerlingen nog niet in staat te zijn om metacognitief te reflecteren. Om de leerlingen hierbij te begeleiden kan het stappenplan van Pólya (1945) of het drieslagmodel (Van Groenestijn et al., 2011) gehanteerd worden. Daarnaast zijn heuristieken nodig bij het aanpakken van een probleemopgave (Ale & Van Schaik, 2017). In de praktijk blijkt dat leerlingen weinig kennis en vaardigheden van heuristieken bezitten, maar dat het gebruik van deze algemene handvatten ze wel helpend lijkt. De leerkrachten besteden nog te weinig aandacht aan het gebruik van heuristieken. Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) pleiten voor het geven van regelmatig instructie die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken. Uit de literatuur is gebleken dat bij het reflecteren op het oplossingsproces (metacognitieve component) een wiskundige attitude bij zowel leerkracht als leerling nodig is (De Goeij & Oonk, 2017). Dit doet de leerkracht door minder gericht te zijn op het geven van goede antwoorden, maar door de aandacht te verplaatsen naar het construeren, vergelijken en evalueren van de verschillende oplossingsmanieren (Bruin-Muurling & Verschoor, 2015; Kool, 2020). De wiskundige attitude bij leerlingen gaat onder andere over het hebben van plezier tijdens het werken aan een probleemopgave (Boaler, 2016; De Goeij & Oonk, 2017). Uit het contextonderzoek komt naar voren dat deze voorwaarde bij de leerlingen aanwezig is.

Het merendeel van de leerlingen ervaart in de praktijk dat er nog geen probleemopgaven worden aangeboden. Om leerlingen regelmatig te laten werken aan probleemopgaven kunnen de kenmerken van Van Zanten (2019) gehanteerd worden. Hierdoor kan iedere leerling, ondanks uiteenlopende reken-wiskundige kennis en vaardigheden, werken aan een probleemopgave. Wolfram (2010) gaf in zijn lezing aan dat er binnen het onderwijs veel meer aandacht moet zijn voor het probleemoplossen dan voor het aanleren van rekenvaardigheden. Tot nu toe gaat de meeste tijd naar het uitrekenwerk, terwijl die stap in de toekomst vervangen gaat worden door computers (Ale & Van Schaik, 2017). Wolfram (2010) meent dat het stellen van de juiste vragen veel belangrijker is. Uit observaties in de praktijk blijkt dat de leerkrachten doorgaans lagere orde vragen stellen. Het stellen van lagere orde vragen draagt volgens Dains (1986) niet bij aan het stimuleren van wiskundig denken. Noteboom (2020) pleit hierbij voor rijke rekenvragen. Rijke rekenvragen doen een beroep op het wiskundig denken en bevatten (meestal) meerdere, acceptabele antwoorden. Daarnaast staat bij deze manier van vragen niet het antwoord, maar het oplossingsproces centraal. Noteboom en Verbeeck (2020) hebben twee methoden ontwikkeld waarbij men in de praktijk een standaardvraag kan ombouwen naar een rijke rekenvraag. Uit het contextonderzoek is gebleken dat leerkrachten behoefte hebben aan kennis en vaardigheden om rijke rekenvragen te ontwerpen.

4.2.2 Aanbevelingen voor de praktijk

Naar aanleiding van het praktijkgerichte onderzoek worden de volgende aanbevelingen geformuleerd voor in de praktijk:

- Om de probleemoplossende vaardigheden van leerlingen te stimuleren, laat je leerlingen regelmatig ervaring opdoen met probleemoplossen (Schoenfeld, 1985; Van Zanten, 2020).
- Begeleid leerlingen bij het aanpakken van probleemopgaven. Gebruik hierbij de stappen van Pólya (1945) of de verschillende fases van het drieslagmodel (Van Groenestijn et al., 2011).
- Bevorder het actieve denken van leerlingen door gebruik te maken van één van de twee methoden waarmee een standaardvraag omgebouwd kan worden naar een rijke rekenvraag (Noteboom & Verbeeck, 2020).
- Geef de leerlingen geregeld een instructie die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken, ook als deze niet vermeld in het methodemateriaal staan (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2019).
- Stimuleer een wiskundige attitude bij leerlingen (De Goeij & Oonk, 2017) door samen te reflecteren op de componenten van het reken-wiskundeonderwijs (Kool, 2020).

5. Ontwerpen

In dit hoofdstuk worden de ontwerpeisen weergegeven, waar het uiteindelijke ontwerp aan moet voldoen. In Tabel 4 is te lezen op basis van welke data de ontwerpeisen zijn geformuleerd. Daarnaast worden de voorlopige doelen van het ontwerp gepresenteerd.

5.1 Uitgangspunten ontwerpen

Tabel 4

Verantwoording van ontwerpeisen op basis van verzamelde data

Ontwerpeisen	Op basis van welke data is deze ontwerpeis geformuleerd?
Het ontwerp is erop gericht dat alle leerlingen ervaring op doen met probleemoplossen.	Groepsinterview: De leerkrachten geven aan dat de zwakkere rekenaars minder behoefte hebben aan probleemoplossen. Dit is ter discussie gesteld in hoofdstuk 4.1. Tekstbron: “Probleemoplossen is leuk en belangrijk voor alle leerlingen” (Van Zanten, 2019, p. 4). Om de leerling ervaring op te laten doen met probleemoplossen, worden de volgende kenmerken van Van Zanten (2019) gehanteerd: 1. Aantal gegevens moet beperkt zijn; 2. Voor iedereen moet het mogelijk zijn om een begin te kunnen maken met het oplossen; 3. Het helpt het als er verschillende mogelijkheden zijn om het ‘goed’ te doen. Vooral als zowel meer geavanceerde als meer eenvoudige aanpakken beide tot een correcte oplossing kunnen leiden. Met als doel dat alle leerlingen, ondanks uiteenlopende rekenwiskundige kennis, ervaring opdoen met probleemoplossen.
Het ontwerp biedt leerkrachten handvatten om een standaardvraag vanuit de rekenmethode om te kunnen bouwen naar een rijke rekenvraag.	Tekstbron: Noteboom en Verbeeck (2020) hebben twee methoden ontwikkeld waarmee een standaardvraag omgebouwd kan worden naar een rijke rekenvraag. Doel is dat de vraagstelling van de leerkracht het actieve denken van de leerlingen gaat stimuleren. Vragenlijst leerkrachten: Het ombouwen van een vraag naar een rijke rekenvraag wordt door de leerkrachten ‘zelden’ gedaan. Het lijkt erop dat ze handvatten missen. Groepsinterview leerkrachten: De leerkrachten geven aan dat ze behoefte hebben aan handvatten om de leerlingen in de juiste denkstand te krijgen.
Binnen het ontwerp ligt het accent op het construeren, vergelijken en evalueren van oplossingsmanieren en minder op het geven van goede antwoorden.	Tekstbron: Tijdens en na afloop van het werken aan een probleemopgave is er een wiskundige attitude nodig (De Goeij & Oonk, 2017). Binnen het onderwijs is een verschuiving van aandacht nodig. Waarbij destijds de focus lag op het geven van goede antwoorden (traditioneel rekenonderwijs) moet er nu vooral aandacht zijn voor het construeren, vergelijken en evalueren van de verschillende oplossingsmanieren.

Het drieslagmodel (Van Groenestijn et al., 2011) wordt door alle leerkrachten gebruikt om leerlingen te begeleiden bij het werken aan een probleemopgave.	Tekstbron: Het drieslagmodel is een effectief model om leerlingen te begeleiden tijdens het werken aan een probleemopgave. Bruin-Muurling en Verschoor (2015) stellen dat het probleemoplossend handelen van de leerling bevordert wordt wanneer de drie fasen stapsgewijs doorlopen worden. Groepsinterview leerkrachten: Meerdere leerkrachten vragen zich af hoe ze ervoor kunnen zorgen dat leerlingen zelf gaan controleren of de door hen gegeven antwoord kloppen (as van reflectie).
De leerlingen krijgen regelmatig een instructie die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken.	Tekstbron: Van Zanten en Van den Heuvel-Panhuizen (2019) schrijven dat leerkrachten instructie kunnen geven die zich richt op het leren gebruiken van heuristieken: algemene handvatten, zoals het maken van een tekening of het terugredeneren binnen een opgave. Met als doel dat de mogelijkheden die leerlingen tot hun beschikking hebben, worden uitgebreid. Vragenlijst leerkrachten: In de praktijk wordt er door drie leerkrachten ‘soms’ een instructie gegeven die zich richt op het gebruiken van heuristieken. Eén leerkracht doet dit ‘nooit’. Diagnostisch rekengesprek: In de praktijk blijkt dat de (controle) leerlingen weinig kennis en vaardigheden van heuristieken bezitten.

5.2 Voorlopige doelen

Het onderzoeksdoel luidt: ‘Het aanreiken van handvatten waarmee de leerkrachten de leerlingen kunnen stimuleren tot wiskundig leren denken binnen het reken-wiskundeonderwijs.’ Naar aanleiding van de ontwerpeisen is dit onderzoeksdoel aangescherpt en zijn er een aantal na te streven doelen opgesteld.

Leerlingniveau

- De leerling doet ervaring op met wiskundig probleemoplossen.
- De leerling maakt kennis met de verschillende stappen vanuit het drieslagmodel.
- De leerling leert dat er verschillende standaardaanpakken, heuristieken, bestaan om een probleemopgave aan te kunnen pakken.

Leerkrachtniveau

- De leerkracht is in staat om een rijke rekenvraag te ontwerpen.
- De leerkracht doet kennis op over de verschillende stappen binnen het drieslagmodel.
- De leerkracht is in staat om leerlingen te begeleiden tijdens het aanpakken van een probleemopgave. De stappen van het drieslagmodel worden hierbij stapsgewijs gehanteerd.
- De leerkracht is zich bewust in de verschuiving van aandacht binnen het reken-wiskundeonderwijs; gericht op het geven van goede antwoorden naar het construeren, vergelijken en evalueren van de verschillende oplossingsmanieren.

Literatuurlijst

- Ale, P., & Van Schaik, M. (2017). *Rekenen-wiskunde en didactiek: De rol van de leerkracht in het basisonderwijs*. Bussum: Coutinho.
- Anderson, L., & Krathwohl, D. R. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Geraadpleegd op 26 december 2020, van <https://www.uky.edu/~rsand1/china2018/texts/Anderson-Krathwohl%20-%20A%20taxonomy%20for%20learning%20teaching%20and%20assessing.pdf>
- Beter Onderwijs Nederland. (2017, 1 juni). *Jo Boaler*. Geraadpleegd op 4 januari 2021, van <https://www.beteronderwijsnederland.nl/blogs/2017/06/jo-boaler/>
- Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets*. San Fransisco, CA: Jossey-Bass.
- Bor-de Vries, M., & Drijvers, P. (2015). *Handreiking Denkactiverende wiskundelessen*. Geraadpleegd op 6 oktober 2020, van <https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/322362/handreiking.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Brouwer, G., & Ahlers, L. (2011). *Knappe koppen in de klas: Wat (hoog)begaafde leerlingen nodig hebben in het onderwijs*. Amersfoort: CPS.
- Bruin-Muurling, G., & Verschoor, M. (2015). Op de toekomst voorbereid: Kritisch wiskundig leren denken. *Volgens Bartjens*, 34(5), 36-39. Geraadpleegd op 6 oktober 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3343_Op-de-toekomst-voorbereid-Kritisch-wiskundig-leren-denken
- Buter, A., & Mulder, M. (2017). Rekenen op begrip: Kiezen voor de juiste vorm van instructie. *Volgens Bartjens*, 36(3), 4-8. Geraadpleegd op 6 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3675_Rekenen-op-begrip-Kiezen-voor-de-juiste-vorm-van-instructie
- Dains, D. (1986). Are Teachers Asking the Right Questions? *Education*, 1(4), 368-374.
- De Goeij, E., & Oonk, W. (2017). *Het stimuleren van een wiskundige attitude*. Geraadpleegd op 13 november 2020, van <https://panamaconferentie.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/22/2017/01/09-Goeij-WEB.pdf>
- Drijvers, P. (2015a). Kernaspecten van wiskundig denken. *Euclides*, 90(5), 4-8. Geraadpleegd op 6 oktober 2020, van <https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/Kernaspecten-van-wiskundig-denken-dr.-P.H.M.-Drijvers.pdf>
- Drijvers, P. (2015b). *Denken over wiskunde, onderwijs en ICT*. Geraadpleegd op 6 oktober 2020, van https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/Oratie_Paul_Drijvers_facsimile_20150521.pdf
- Drijvers, P. (2018). *Hoofd in de wolken, voeten op de vloer: Praktijkgericht onderzoek naar wiskundig denken in ICT-rijk reken-wiskundeonderwijs*. Geraadpleegd op 11 oktober 2020, van <https://elbd.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/108/2018/10/Openbare-les-Paul-Drijvers-Hoofd-in-de-wolken-1.pdf>
- Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *Zentral blatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 605-618. Geraadpleegd op 12 oktober 2020, van https://www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah/download/Elia-vdHeuvel-Kolovou_2009_ZDM_flexible-strategies.pdf
- Gerrits, P., & Logtenberg, H. (2015, januari). *Kinderen uitdagen in de rekenles*. Geraadpleegd op 18 november 2020, van https://www.cps.nl/l/library/download/urn:uuid:6bc3c6de-48f3-433f-9a5c-e7082bbc4ca4/kinderen+uitdagen+in+de+rekenles_def10062015.pdf?format=save_to_disk&ext=.pdf

- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- Janson, D. (2014). Op weg naar beter reken-wiskundeonderwijs: Kansen en bedreigingen. *Volgens Bartjens*, 33, 125-127. Geraadpleegd op 24 oktober 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/documenten/archief/bartjens/pp_33_125_-_127_janson_op_weg_naar_beter_reken-wiskundeonderwijs.pdf
- Janson, D. (2017). *Rekenonderwijs kan anders*. Hengelo: Sabine Kokee, Leuker.Nu.
- Jonassen, D., & Hung, W. (2008). All Problems are Not Equal: Implications for Problem-Based Learning. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 2(2), 6-28. Geraadpleegd op 12 november 2020, van <https://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1080&context=ijpbl>
- Keijzer, R., & Verbruggen, I. (2020). Rekenen-wiskunde van... tot... Verslag van de 38e Panama-conferentie. *Volgens Bartjens*, 39(5), 50-58. Geraadpleegd op 21 oktober 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3885_Rekenen-wiskunde-van-tot
- Kirschner, P., Claessens, L., & Raaijmakers, S. (2018). *Op de schouders van reuzen*. Geraadpleegd op 11 januari 2021, van <https://newsroom.didactiefonline.nl/uploads/BOEKEN/20190107%20Op%20de%20schouders%20van%20reuzen%20Definitief%20download.pdf>
- Kool, M. (2020). Met Torpedo terugblikken om vooruit te komen in het oplossen van reken-wiskunde problemen. *Volgens Bartjens*, 40(2), 41-52. Geraadpleegd op 21 oktober 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-6176_Met-Torpedo-terugblikken-om-vooruit-te-komen-in-het-oplossen-van-reken-wiskunde-problemen
- Lucassen, M. (2018, 12 oktober). *De Taxonomie van Bloom: inhoudelijk goed, maar vaak fout gebruikt*. Geraadpleegd op 19 november 2020, van <https://www.vernieuwenderwijs.nl/de-taxonomie-van-bloom-vaak-verkeerd-gebruikt-maar-zo-werkt-het-wel/>
- Müller, M. (2020). In gesprek met Emma: Rekenen- en wiskundige denk- en werkwijzen in de rekenles. *Volgens Bartjens*, 39(3), 14-17. Geraadpleegd op 4 december 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3843_In-gesprek-met-Emma
- Noteboom, A. (2020). De kracht van rijke rekenvragen. *Volgens Bartjens*, 39(5), 9-13. Geraadpleegd op 5 juni 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3880_De-kracht-van-rijke-rekenvragen
- Noteboom, A., & Verbeeck, K. (2020). Hoe ontwerp je rijke rekenvragen? *Volgens Bartjens*, 39(5), 28-31. Geraadpleegd op 5 juni 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3874_Hoe-ontwerp-je-rijke-rekenvragen
- NRO. (2017, 12 november). *Wat is de effectiviteit van het directe-instructiemodel op de leervorderingen van leerlingen, in het bijzonder in het voortgezet onderwijs?* Geraadpleegd op 6 november 2020, van <https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/266-antwoord-directe-instructie.pdf>
- Ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. (2019). *Leergebieden Rekenen & Wiskunde*. Geraadpleegd op 2 oktober 2020, van <https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Schmeier, M. (2017). *Effectief rekenonderwijs op de basisschool*. Huizen: Pica.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 334-370). Geraadpleegd op 7 oktober 2020, van http://howtosolveit.pbworks.com/f/Schoenfeld_1992%20Learning%20to%20Think%20Mathematically.pdf

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Sjoers, S. (2018). *Sterke rekenaars in het basisonderwijs* (2e druk). Amersfoort: CPS.
- SLO. (2020, maart). *Leerlijn probleemoplossend denken en handelen*. Geraadpleegd op 2 januari 2021, van SLO.nl:
https://www.slo.nl/publish/pages/10751/leerlijn_probleemoplossend_denken_handelen_mart_2020.pdf
- Terlouw, B. (2015). Leren van kinderen: Probleemoplossend vermogen in de rekenles. *Volgens Bartjens*, 35(2), 22-25. Geraadpleegd op 8 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3408_Leren-van-kinderen-Probleemoplossend-vermogen-in-de-rekenles
- Treffers, A. (1978). *Wiskunde doelgericht*. Utrecht: IOWO.
- Van Boxel, N. (2019, januari 24). *Het rekenonderwijs van de toekomst*. Geraadpleegd op 16 januari 2021, van <https://www.onderwijsvanmorgen.nl/het-rekenonderwijs-van-de-toekomst/>
- Van den Bergh, J. (2018). Probleemoplossen en gecijferheid. *Volgens Bartjens*, 38(1), 10-11. Geraadpleegd op 8 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3714_Probleemoplossen-en-gecijferdheid-jrg-38-nr-1-2018
- Van den Boogaard, J., & Smoors, M. (2015). Het denkproces in beeld. *Volgens Bartjens*, 34(5), 16-18. Geraadpleegd op 11 januari 2021, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3350_Het-denkproces-in-beeld-Denkbeelden-in-de-rekenles
- Van der Donk, C., & Van Lanen, B. (2020). *Praktijkonderzoek in de school* (4e herziene druk). Bussum: Coutinho.
- Van Groenestijn, M., Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskundeproblemen en Dyscalculie*. Geraadpleegd op 14 december 2020, van <https://erwd.nl/protocol/primair-onderwijs>
- Van Streun, A. (2001). *Het denken bevorderen*. Geraadpleegd op 12 november 2020, van <https://www.rug.nl/research/portal/files/14560113/vanstreun.pdf>
- Van Zanten, M. (2011). *Rekenen-wiskunde op de basisschool*. Geraadpleegd op 17 december 2020, van https://website.thiememeulenhoff.nl/binaries/content/assets/standaardsites/content-paborekenen/rekenen-wiskunde_op_de_basisschool.pdf
- Van Zanten, M. (2017). *Rekenen-wiskunde in de 21^e eeuw: Ideeën en achtergronden voor het primair onderwijs*. Geraadpleegd op 2 oktober 2020, van https://panamaconferentie.sites.uu.nl/wp-content/uploads/sites/22/2017/01/Panama-35_Rekenen-wiskunde_in_de_21e_eeuw_gecorrigeerd.pdf
- Van Zanten, M. (2019). Probleemoplossen voor alle leerlingen. *Volgens Bartjens*, 38(5), 4-8. Geraadpleegd op 8 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3800_Probleemoplossen-voor-alle-leerlingen-jrg-38-nr-5-2019
- Van Zanten, M. (2020). Geinige getallenpuzzels en gruwelijke grafieken. *Volgens Bartjens*, 39(5), 4-7. Geraadpleegd op 19 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3882_Geinige-getallenpuzzels-en-gruwelijke-grafieken
- Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2018). *Opportunity to learn problem solving in Dutch primary school*. Geraadpleegd op 12 november 2020, van <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-018-0973-x>
- Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Probleemoplossen in reken-wiskundemethodes. *Volgens Bartjens*, 38(3), 22-27. Geraadpleegd op 8 november 2020, van https://www.volgens-bartjens.nl/art/50-3756_Probleemoplossen-in-reken-wiskundemethodes-Jrg-38-nr-3-2019
- Wolfram, C. (2010, juli). *Teaching kids real math with computers* [Videobestand]. Geraadpleegd op 14 november 2020, van https://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers